Министерство образования
Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

Л.Н. МАРЧЕНКО

М А Т Е М А Т И Ч Е С К И Й А Н А Л И З

Курс лекций
для студентов физического факультета

В пяти частях

Часть первая

В в е д е н и е в а н а л и з

Гомель 2006

УДК 517 (075.8)
ББК 22. 161 Я73
М 30

Рецензенты:

Л.П. Авдашкова, доцент, кандидат физико-математических наук, кафедра высшей математики учреждения образования «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации»

А.Р. Миротин, профессор, доктор физико-математических наук, кафедра высшей математики учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины

Марченко Л.Н.

М30 Математический анализ [текст] : [курс лекций для студентов физического факультета. Ч.1.: Введение в анализ] /Л.Н. Марченко: Мин-во обр. РБ. – Гомель: «УО ГГУ им. Ф. Скорины», 2006.–126с.

Курс лекций разработаны в соответствии с требованиями государственного стандарта подготовки специалистов специальности «Физическая электроника». В части первой излагаются элементы теории множеств и теории пределов.

Пособие адресовано студентам физического факультета.

УДК 517 (075.8)
ББК 22. 161 Я73

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие начинает цикл работ по курсу «Математический анализ», которые написаны на основе лекций, читаемых на физическом факультете Гомельского государственного университета им. Ф.Скорины. Их содержание включает теоретический материал, соответствующий учебной программе по данной дисциплине, и который изложен в учебниках и учебных пособиях по математическому анализу. В рамках курса излагаются действительный и комплексный анализ, при этом даются основы теории последовательностей, теории функции одной и нескольких действительных переменных, дифференциального и интегрального исчисления, элементы векторного анализа, теории рядов, теории функций комплексного переменного и элементы операционного исчисления.

Первая часть содержит материал по темам: «Элементы теории множеств», «Предел последовательности», «Предел функции», которые условно можно назвать «Введение в анализ». В начале каждой лекции сформулированы основные рассматриваемые вопросы, отражающие ее содержание. Далее приводятся определения основных понятий, формулировки теорем и следствий из них, доказательства наиболее важных теорем. Теоретические положения иллюстрируются решениями задач, многие из которых имеют прикладную направленность. Каждая лекция имеет свою нумерацию определений, теорем, рисунков и таблиц. В конце лекции сформулированы вопросы, позволяющие обучаемому организовать самоконтроль знаний. Поскольку объем пособия не позволяет привести доказательства всех утверждений, то читателю предлагается самостоятельно воспользоваться учебниками, приведенными в списке литературы.

Пособие рекомендуется для использования студентами при самостоятельном изучении математического анализа, является основой для подготовки к сдаче экзаменов и зачетов.

При формулировке теорем и их доказательств, приходится повторять отдельные слова и выражения. Чтобы сократить записи, в пособии используются приводимые ниже логические символы.

$\forall$ – квантор общности, читается: «любой», «всякий», «каждый».

$\exists$ – квантор существования, читается: «существует», «найдется».

$\exists!$ – существует и единственный.

: – двоеточие означает «имеет место», «такое, что».

$\Rightarrow$ – символ логического следования означает «следует», «вытекает».

$\Leftrightarrow$ – символ эквивалентности обозначает равносильность утверждений, расположенных по разные стороны от него, и читается: «тогда и только тогда, когда ...», «равносильно...», «необходимо и достаточно».

С помощью квантора общности $\forall$ выражение «для любого x из множества *M*» можно записать короче: $\forall x \in M$. С помощью квантора существования $\exists$ выражение «существует x, принадлежащее множеству *M*, такое, что ...» записывают так: $\exists x \in M :$. Начала доказательств обозначаются символом – ►, окончание – ◄.

Тема 1
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Лекция 1. МНОЖЕСТВА

1. Язык теории множеств.
2. Операции над множествами.
3. Отображение множеств.

1. Язык теории множеств. Понятие множества считается первоначальным, неопределяемым. Под ***множеством*** понимается совокупность определенных и отличных друг от друга объектов, объединенных общим характерным признаком в единое целое. В математике вместо термина «множество» часто говорят «система», «класс», «семейство», «совокупность».

Объекты или предметы, из которых состоит множество, называют ***элементами множества***.

Множества обозначаются прописными буквами латинского алфавита $A, B, \ldots$. Элементы множества – строчными $a, b, \ldots$. Если элемент a ***принадлежит*** множеству A, то пишут $a \in A$; если a ***не принадлежит*** множеству A, пишут $a \notin A$.

Элементами множеств могут быть объекты самой различной природы. В математике чаще рассматриваются множества, состоящие из чисел, точек, кривых и т. д.

Способы задания множеств:

– перечисление элементов – если множество A состоит из элементов a, b, c, d, то пишут $A = \{a, b, c, d\}$;

– указание характеристического свойства элементов – если множество A задается указанием характерного свойства $P(x)$ его элементов, то пишут $A = \{x \mid P(x)\}$;

– диаграммы Эйлера-Венна – множества изображаются в виде кругов, треугольников или геометрических фигур произвольной формы, внутри которых располагаются элементы множеств.

Множество, состоящее из одного элемента, называется ***одноэлементным*** и *обозначается* $\{a\}$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется ***пустым*** и *обозначается* символом $\varnothing$.

Примеры. 1. Множество действительных корней уравнения $x^2+4=0$ пусто.

Определение 1. Множества A и B называются ***равными***, если каждый элемент множества A является элементом множества B и, наоборот, каждый элемент множества B является элементом множества A, т.е. они состоят из одних и тех же элементов.

Обозначается: $A=B$.

Если множество A ***не равно*** множеству B, то пишут $A \neq B$.

Пример. Пусть A – множество корней уравнения $x^2+5x+6=0$, $A=\left\{x \middle| x^2+5x+6=0\right\}$. Множество $B=\left\{2,3\right\}$. Очевидно, что $A=B$.

Равенство множеств обладает следующими **свойствами**:

1) рефлексивность: $A=A$;

2) симметричность: $A=B \Rightarrow B=A$;

3) транзитивность: $A=B, B=C \;\Rightarrow A=C$.

Определение 2. Множество A, $A \neq \varnothing$, называется ***подмножеством*** множества B, $B \neq \varnothing$, если каждый элемент множества A является элементом множества B.

Обозначается: $A \subseteq B$.

Очевидно, что $\varnothing \subseteq B \;\; \forall B$.

Определение 3. Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то A называется ***собственным подмножеством*** множества B.

Обозначается: $A \subset B$.

Пример. Любое натуральное число $n \in \mathbf{N}$ является целым, поэтому $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$. Целое число $p \in \mathbf{Z}$ является рациональным, следовательно, $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$. Рациональное число $q \in \mathbf{Q}$ является действительным, поэтому $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$. Следовательно, $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

2. Операции над множествами. Будем рассматривать всевозможные подмножества одного и того же множества, которое называется ***основным*** или ***универсальным***. *Обозначается* универсальное множество буквой U.

Пример. В планиметрии в качестве универсального множества можно рассматривать множество $\mathbf{R}^2$ всех точек плоскости Oxy. Тогда различные фигуры на плоскости будут подмножествами $\mathbf{R}^2$.

Определение 4. ***Объединением*** множеств A и B называется множество $A \cup B$, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат хотя бы одному из множеств:

$$A \cup B = \left\{ x \middle| \ x \in A \text{ или } x \in B \right\}.$$

Свойства операции объединения множеств:

1) коммутативность: $A \cup B = B \cup A$;

2) ассоциативность: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

3) $A \cup A = A$;

4) $A \cup \varnothing = A$;

5) $A \cup U = U$.

Определение 5. ***Пересечением*** множеств A и B называется множество $A \cap B$, состоящее из всех тех и только тех элементов, каждый из которых принадлежит обоим множествам одновременно:

$$A \cap B = \left\{ x \middle| x \in A \text{ и } x \in B \right\}.$$

Свойства операции пересечения:

1) коммутативность: $A \cap B = B \cap A$;

2)ассоциативность: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

3) $A \cap A = A$;

4) $A \cap \varnothing = \varnothing$;

5) $A \cap U = A$;

6) дистрибутивность операций объединения и пересечения:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Определение 6. ***Разностью*** двух множеств B и A называется множество $B \setminus A$, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат B, но не принадлежат A:

$$B \setminus A = \left\{ x \middle| \ x \in B \text{ и } x \notin A \right\}.$$

Определение 7. Разность $U \setminus A$ называется ***дополнением*** множества A до универсального множества U.

Обозначается: $\overline{A} = U \setminus A = \left\{ x \middle| \ x \notin A \right\}$.

Свойства операции разность:

1) $A \cup \overline{A} = U$;

2) $A \cap \overline{A} = \varnothing$;

3) $\overline{\overline{A}} = A$;

4) $\overline{\varnothing} = U$;

5) $\overline{U} = \varnothing$.

Все операции геометрически удобно изображать на диаграммах Эйлера-Венна. Например, на рисунке 1 представлена операция пересечения множеств A и B.

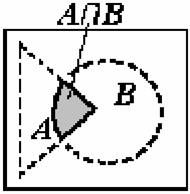

Рис.1. Пересечение множеств

Примеры. 1. Если $A = \{1,3,5\}$, $B = \{4,5,6\}$, то

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\},\ A \cap B = \{5\}.$$

2. Пусть **Z** – множество целых чисел p. Примем это множество за универсальное, и рассмотрим два его подмножества $A = \{\, p \mid 0 < p < 30 \,\}$ и $B = \{\, p \mid 10 < p < 40 \,\}$. Тогда

$$B \setminus A = \{\, p \mid 30 < p < 40 \,\}.$$

Определение 8. Пара элементов $(x; y)$, $x \in A$, $y \in B$, называется ***упорядоченной***, если указан порядок записи элементов x и y.

Равенство $(x_1; y_1) = (x_2; y_2)$ выполняется тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Элементы x и y упорядоченной пары $(x; y)$ называются ***координатами***, при этом x – первая координата, y – вторая.

Определение 9. ***Декартовым произведением*** двух множеств A и B называется множество $A \times B$, состоящее из всевозможных упорядоченных пар $(x; y)$, $x \in A$, $y \in B$.

Обозначается: $A \times B = \{(x; y) \mid x \in A, y \in B\}$.

Пример. Если $A = \{1;3\}$, $B = \{5;7\}$, то

$A \times B = \{(1;5),(1;7),(3;5),(3;7)\}$, $B \times A = \{(5;1),(5;3),(7;1),(7;3)\}$.

Сравнивая $A \times B$ и $B \times A$, видно, что $A \times B \neq B \times A$ при $A \neq B$.

Если $A = B$, то $A \times A$ называется ***декартовым квадратом***.

Обозначается: $A^2 = A \times A$.

3. Отображение множеств. Пусть X, Y – произвольные множества.

Определение 10. Соответствие, при котором каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$, называется ***функцией*** (***отображением***), заданной на множестве X со значениями во множестве Y. При этом элемент x называется ***независимым переменным*** (***аргументом***), элемент y – зависимым переменным.

Обозначается: $f: x \mapsto y$ при $x \in X$, и $y \in Y$,

$$f: X \to Y.$$

Множество X называется ***областью определения*** отображения f и *обозначается* $D(f)$. Множество тех $y \in Y$, каждый из которых поставлен в соответствие хотя бы одному $x \in X$, называется ***множеством значений*** отображения f и *обозначается* $E(f)$. Очевидно, что $E(f) \subseteq Y$.

Элемент $y \in Y$, в который отображен $x \in X$, называется ***образом*** элемента x при отображении f и обозначается $f(x)$. Элемент x называется ***прообразом*** элемента $f(x)$. Поэтому отображение удобно записывать в виде $y = f(x)$, $x \in X$.

Определение функции с помощью логических символов записывается в виде:

$$f: x \mapsto y \iff \forall x \in X \ \exists! y \in Y : y = f(x).$$

Множество образов всех элементов $x \in X$ при отображении f называется ***образом множества*** X при этом отображении:

$$f(X) = \{ f(x) | \, x \in X \} \subseteq Y.$$

Определение 11. ***Полным прообразом*** множества $B \subset Y$ при отображении f называется множество $f^{-1}(B)$, состоящее из всех прообразов всех элементов множества B:

$$f^{-1}(B) = \{ x \in X | \, f(x) \in B \} \subseteq X.$$

Определение 12. Отображение f^{-1} называется ***обратным*** к отображению f, если элементу $y \in Y$ ставится в соответствие тот элемент $x \in X$, образом которого при отображении f является y.

Символическая запись:

$$f^{-1}: y \mapsto x \iff \forall y \in Y \ \exists x \in X : x = f^{-1}(y).$$

Определение 13. Отображение f называется

1) ***сюръекцией***, если $E(f)=Y$;

2) ***инъекцией***, если при $\forall x_1, x_2 \quad x_1 \neq x_2$ выполняется неравенство $f(x_1)\neq f(x_2)$;

3) ***биекцией*** (***взаимно однозначным***), если каждый элемент $y \in Y$ является образом только одного элемента $x \in X$ (рис. 2):

$$\forall y \in Y\ \exists x \in X : y = f(x),\ \forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2).$$

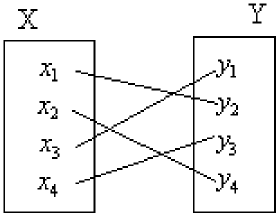

Рис.2. Биекция множеств X и Y.

Если f является взаимно-однозначным отображением X на Y, то обратное отображение f^{-1} является взаимно однозначным отображением Y на X. Поэтому они называются ***взаимно обратными отображениями***

Пусть $f : x \mapsto y$ и $g : y \mapsto z$ отображения, где область значений первого совпадает с областью определения второго.

Определение 14. ***Композицией*** (***сложной функцией***) отображений $f : x \mapsto y$ и $g : y \mapsto z$ называется отображение $g \circ f : x \mapsto z$ такое, что

$$\forall\ x \in X \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Определение 15. Два множества A и B называются ***эквивалентными*** (***равномощными***), если существует хотя бы одно взаимно однозначное отображение одного множества на другое.

Обозначается: A~B.

Пример. Доказать, что множества $\mathbf{N} = \{n \mid n = 1, 2, 3, ...\}$ и $A = \{2n \mid n \in \mathbf{N}\}$ эквивалентны.

Решение. Установим между ними взаимно однозначное соответствие с помощью соотношения $n \leftrightarrow 2n$, т.е.

$$\begin{array}{ccccc} 1, & 2, & \ldots, & n, & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 2, & 4, & \ldots, & 2n, & \ldots \end{array}$$

Таким образом, множество натуральных чисел **N** эквивалентно собственному подмножеству четных натуральных чисел.

Определение 16. Всякое множество, эквивалентное множеству натуральных чисел **N**, называется ***счетным***.

Если множество A счетное, то его элементы можно занумеровать.

Множества, состоящие из конечного числа элементов, называются ***конечными***. Множество, не являющееся конечным, называется ***бесконечным***. Если A – конечное множество, то число его элементов *обозначается* $|A|$ или $\dim A$ и называется ***мощностью множества*** A.

Пример. Множество решений кубического уравнения, множество вершин многоугольника конечны. Множество натуральных чисел, множество всех прямых, проходящих через фиксированную точку плоскости, бесконечны.

Вопросы для самоконтроля

1. Что вы понимаете под термином «множество»? Приведите примеры множеств.

2. Какие существуют способы задания множеств?

3. Какие множества называются равными? Приведите примеры.

4. Что называется подмножеством множества? Какое подмножество называется собственным подмножеством множества?

5. Запишите с помощью кванторов определение операций объединения, пересечения, разности и дополнения. Изобразите их на кругах Эйлера- Венна.

6. Что называется декартовым произведением множеств?

7. Что называется отображением? Дайте определения области определения и области значения отображения.

8. Какое отображение называется сюръекцией, инъекцией, биекцией?

9. Что называется композицией отображений?

10. Дайте определение эквивалентности множеств.

11. Какое множество называется счетным? Приведите примеры счетных множеств.

Лекция 2. ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

1. Числовые множества $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$.
2. Множество действительных чисел $\mathbf{R}$.
3. Основные подмножества (промежутки) множества $\mathbf{R}$.
4. Абсолютная величина (модуль) действительного числа.

1. Числовые множества $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$.

Определение 1. Множество $\mathbf{N}$ ***натуральных*** чисел – это множество чисел, которые используются при счете:

$$\mathbf{N} = \{1,2,3,...\}.$$

Свойства множества $\mathbf{N}$:

1) сумма и произведение двух натуральных чисел являются натуральными числами, т.е.

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbf{N}: \ n_1 \cdot n_2 \in \mathbf{N}, \ n_1 + n_2 \in \mathbf{N};$$

2) операции вычитания и деления в **N** не всегда выполнимы, так как $\forall n_1, n_2 \in \mathbf{N}$ частное $\dfrac{n_1}{n_2}$ не всегда принадлежит **N**, а $n_1 - n_2 \in \mathbf{N}$ при $n_2 < n_1$;

3) $1 \in \mathbf{N}$;

4) $n \in \mathbf{N} \Rightarrow n+1 \in \mathbf{N}$;

5) если $M \subseteq \mathbf{N}$, $1 \in M$ и $n \in M \ \Rightarrow \ (n+1) \in M$, то $M = \mathbf{N}$ (*аксиома индукции*);

6) $\mathbf{N}$ счетно и бесконечно.

Аксиома индукции служит основой метода математической индукции, который используется при доказательстве некоторых равенств и неравенств. Для доказательства методом математической индукции необходимо: 1) проверить верность утверждения при $n = 1$ (либо для первого натурального числа, для которого доказывается утверждение); 2) в предположении, что утверждение верно для $n = k$, доказать его справедливость для следующего натурального числа $n = k + 1$.

Пример. Доказать, что $\forall\ n \in \mathbf{N}$ и $\forall\ x > -1$ справедливо неравенство Бернулли

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Решение. Доказываем методом математической индукции.

Пусть $n=1$. Неравенство справедливо, так как $\forall\ x>-1$ обращается в верное равенство $1+x=1+x$.

Предположим, что неравенство Бернулли справедливо для некоторого $n=k$ и $\forall\ x>-1$:

$$(1+x)^k \ge 1+kx.$$

Докажем его справедливость для $n=k+1$.

Так как $x>-1$, то $1+x>0$. Умножим неравенство верное неравенство на положительное число $1+x$:

$$(1+x)^{k+1} \ge 1+kx+x+kx^2 .$$

Отбрасывая неотрицательное слагаемое kx^2 в правой части, получаем неравенство:

$$(1+x)^{k+1} \ge 1+k(x+1)x .$$

Имеем, что неравенство Бернулли справедливо для натурального числа $k+1$ и $\forall\ x>-1$.

Согласно методу математической индукции, неравенство справедливо $\forall\ n\in\mathbf{N}$ и $\forall\ x>-1$.

О п р е д е л е н и е 2. Объединение натуральных чисел, чисел, им противоположных и нуля составляет множество ***целых*** чисел $\mathbf{Z}$:

$$\mathbf{Z}=\{\ldots,-3,-2,-1,\ 0,1,2,3,\ \ldots\}.$$

Свойства множества $\mathbf{Z}$:

1) $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}$;

2) в $\mathbf{Z}$ определены операции сложения, умножения и вычитания, т.е.

$$\forall p_1, p_2\in\mathbf{Z}:\ \ p_1+p_2\in\mathbf{Z},\ \ p_1\cdot p_2\in\mathbf{Z},\ \ p_1-p_2\in\mathbf{Z},$$

операция деления чисел во множестве $\mathbf{Z}$ не всегда выполнима, так как частное двух целых чисел не всегда целое;

3) $\mathbf{Z}$ счетно и бесконечно;

4) $\mathbf{Z}$ упорядочено, т.е. для любых двух целых чисел $p_1, p_2\in\mathbf{Z}$ имеет место одно и только одно из трех соотношений: $p_1<p_2$, $p_1=p_2$, $p_1>p_2$;

О п р е д е л е н и е 3. Множество чисел вида $\dfrac{p}{n}$, где $p\in\mathbf{Z}$; $n\in\mathbf{N}$, называется ***множеством рациональных*** чисел $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{Q}=\left\{\ q=\frac{p}{n}\ \Big|\ p\in\mathbf{Z}, n\in\mathbf{N}\ \right\}.$$

Свойства множества рациональных чисел $\mathbf{Q}$:

1) $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$;

2) во множестве $\mathbf{Q}$ выполнимы четыре арифметические операции (кроме деления на нуль);

3) $\mathbf{Q}$ счетно и бесконечно;

4) $\mathbf{Q}$ упорядочено;

5) любое рациональное число $q = \dfrac{p}{n}$ может быть записано в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби;

6) множество $\mathbf{Q}$ плотно, т.е. для любых $q_1, q_2 \in \mathbf{Q}$, $q_1 < q_2$ найдется по крайней мере одно рациональное число q, такое, что $q_1 < q < q_2$.

7) аксиома Архимеда

$$\forall q_1, q_2 \in \mathbf{Q} : 0 < q_1 < q_2 \ \exists n \in \mathbf{N} : \ n \cdot q_1 > q_2 .$$

Любое рациональное число можно изобразить точкой на числовой прямой, но не каждой точке этой прямой соответствует рациональное число.

Пример. Точке, отстоящей от начала координат на расстоянии, равном длине диагонали квадрата с единичной стороной, не соответствует никакое рациональное число (не существует такого рационального числа $q = \dfrac{p}{n}$, квадрат которого равен 2).

2. Множество действительных чисел $\mathbf{R}$. Числа, которые представимы в виде бесконечной непериодической десятичной дроби называются ***иррациональными***, т.е. это числа, которые нельзя представить в виде отношения чисел $\dfrac{p}{n}$, где $p \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$.

Пример. Числа $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, \lg 2, \lg 3, \sin 20^\circ$ являются иррациональными числами.

Определение 4. Объединение рациональных и иррациональных чисел составляет ***множество действительных чисел*** $\mathbf{R}$.

Свойства множества действительных чисел $\mathbf{R}$:

1) $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$;

2) $\mathbf{R}$ бесконечно;

3) множество $\mathbf{R}$ несчетно;

4) $\mathbf{R}$ упорядочено;

5) аксиома Архимеда: $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R} : x_1 < x_2 \ \exists n \in \mathbf{N} : \ n \cdot x_1 > x_2$;

6) между действительными числами и точками числовой оси существует взаимно однозначное соответствие, т.е. каждому действительному числу x соответствует единственная точка числовой оси и, наоборот, каждой точке числовой оси соответствует единственное действительное число $x \in \mathbf{R}$.

Во множестве $\mathbf{R}$ определены операции сложения, вычитания, умножения, деления на любое действительное число, отличное от нуля, возведения в степень и др. Все эти операции подчиняются приводимым ниже аксиомам.

Аксиомы сложения

А1. $\forall x, y \in \mathbf{R} : x + y = y + x$ (*коммутативный закон*).

А2. $\forall x, y, z \in \mathbf{R} : (x + y) + z = x + (y + z)$ (*ассоциативный закон*).

А3. $\exists 0 \in \mathbf{R} : \forall x \in \mathbf{R}, \ x + 0 = x$ (*существование в* $\mathbf{R}$ *нуля*).

А4. $\forall x \in \mathbf{R} \ \exists (-x) \in \mathbf{R} : \ x + (-x) = 0$ (*существование в* $\mathbf{R}$ *противоположного элемента*).

Аксиомы умножения

А5. $\forall x, y \in \mathbf{R} \setminus \{0\} : x \cdot y = y \cdot x$ (*коммутативный закон*).

А6. $\forall x, y, z \in \mathbf{R} \setminus \{0\} : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (*ассоциативный закон*).

А7. $\exists 1 \in \mathbf{R} : 1 \cdot x = x \ \ \forall x \in \mathbf{R}$ (*существование нейтрального элемента*).

А8. $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \ \exists x^{-1} \in \mathbf{R} : \ \ x \cdot x^{-1} = 1$ (*существование обратного элемента*).

А9. $\forall x, y, z \in \mathbf{R} : (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ (*дистрибутивный закон относительно сложения*).

Аксиомы порядка

А10. $\forall x, y \in \mathbf{R} : x \neq y \Rightarrow x < y$ или $y < x$.

А11. $\forall x, y \in \mathbf{R} : x \leq y$ и $y \leq x \Rightarrow x = y$.

А12. $\forall x, y, z \in \mathbf{R} : x \leq y$ и $y \leq z \Rightarrow x \leq z$.

Аксиома полноты (непрерывности)

А13. Если непустые множества X, $Y \in \mathbf{R}$ таковы, что $\forall x \in X$ и $\forall y \in Y$ выполняется неравенство $x \leq y$, то $\exists c \in \mathbf{R}$, такое, что $x \leq c \leq y$.

Первые три вида аксиом выполняются на множестве рациональных чисел. Аксиома непрерывности справедлива только во множестве $\mathbf{R}$.

3. Основные подмножества (промежутки) множества $\mathbf{R}$. Символы $-\infty$ и ∞ часто используются в приложениях. Они присоединяются к множеству $\mathbf{R}$ и считается, что $-\infty < x < \infty$ $\forall x \in \mathbf{R}$.

Определение 5. Множество $\forall x \in \mathbf{R}$, пополненное $-\infty$ и ∞, *обозначается* $\overline{\mathbf{R}}$, и называется ***расширенным множеством действительных чисел***, бесконечности $-\infty$ и ∞ называются ***бесконечно удаленными точками*** числовой прямой, остальные точки – ***конечными точками*** числовой прямой.

Основными промежутками во множестве $\overline{\mathbf{R}}$ являются:

Интервал с концами a и b: $(a;b)=\left\{x \in \mathbf{R} \middle| \; a < x < b\right\}$.

Отрезок с концами a и b: $[a;b]=\left\{x \in \mathbf{R} \middle| \; a \le x \le b\right\}$.

Полуинтервалы:

$$[a;b)=\left\{x \in \mathbf{R} \middle| \; a \le x < b\right\},\ (a;b]=\left\{x \in \mathbf{R} \middle| \; a < x \le b\right\}.$$

Бесконечные интервалы и полуинтервалы:

$$[a;+\infty)=\left\{x \in \mathbf{R} \middle| \; x \ge a\right\},\ (a;+\infty)=\left\{x \in \mathbf{R} \middle| \; x > a\right\},$$

$$(-\infty;b)=\left\{x \in \mathbf{R} \middle| \; x < b\right\},\ (-\infty;b]=\left\{x \in \mathbf{R} \middle| \; x \le b\right\},$$

$$(-\infty;+\infty)=\left\{x \in \mathbf{R} \middle| \; -\infty < x < \infty\right\}.$$

Определение 6. ε - ***окрестностью*** $U(\varepsilon,x)$ точки $x \in \overline{\mathbf{R}}$ называется интервал $(x-\varepsilon;x+\varepsilon)$:

$$U(\varepsilon;x)=(x-\varepsilon;x+\varepsilon).$$

Для бесконечно удаленных точек $-\infty$ и $+\infty$ окрестностями являются соответственно

$$U(\varepsilon;-\infty)=\left(-\infty;-\frac{1}{\varepsilon}\right),\quad U(\varepsilon;+\infty)=\left(\frac{1}{\varepsilon};+\infty\right).$$

Две любые различные точки расширенной числовой прямой имеют непересекающиеся окрестности.

4. Абсолютная величина (модуль) действительного числа. Действительные числа могут быть положительными и отрицательными. Иногда приходится рассматривать абсолютную величину действительного числа, игнорируя его знак.

Определение 7. ***Абсолютной величиной*** (***модулем***) действительного числа x называется число x, если $x \ge 0$, и число $-x$, если $x < 0$.

Обозначается:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{при} \quad x \ge 0, \\ -x & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

Если x изображается точкой M числовой оси, то модуль числа x это длина отрезка OM, т.е. $|x| = OM$.

Свойства абсолютной величины числа:

1. $|x| \ge 0$.
2. $|x| = |-x|$.
3. $-|x| \le x \le |x|$.
4. $\forall \varepsilon > 0 : |x| \le \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \le x \le \varepsilon$.
5. $|x + y| \le |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbf{R}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение множества натуральных чисел и перечислите его свойства.

2. Дайте определение множества целых чисел и перечислите его свойства.

3. Дайте определение множества рациональных чисел и перечислите его свойства.

4. Дайте определение множества действительных чисел и перечислите его свойства.

5. Какие промежутки существуют на действительной оси? Дайте определение ε-окрестности точки.

6. Что называется абсолютной величиной действительного числа? Перечислите свойства модуля.

Лекция 3. ГРАНИ ЧИСЛОВЫХ МНОЖЕСТВ

1. Верхняя и нижняя грани числовых множеств.
2. Принцип вложенных отрезков.
3. Перестановка и сочетания.

1. Верхние и нижние грани числовых множеств. Рассмотрим произвольное множество $A \subseteq \mathbf{R}$.

Определение 1. Множество действительных чисел A называется ***ограниченным сверху***, если существует такое действительное число M, что каждое число $x \in A$ удовлетворяет неравенству $x \le M$, т.е.

$$\exists M \in \boldsymbol{R}: \ \forall x \in A \ \ x \le M .$$

Число M называется ***верхней гранью*** множества A.

Множество A *неограниченно сверху*, если

$$\forall M \in \boldsymbol{R}: \ \exists x_0 \in A \ \ x_0 > M .$$

Элемент $c_1 \in A$ называется ***наибольшим элементом*** множества A, если

$$\forall x \in A \ \ x < c_1 .$$

Определение 2. Множество действительных чисел A называется ***ограниченным снизу***, если существует такое действительное число m, что каждое число $x \in A$ удовлетворяет неравенству $x \ge m$, т.е.

$$\exists m \in \boldsymbol{R}: \ \forall x \in A \ \ x \ge m .$$

Число m называется ***нижней гранью*** множества A.

Множество A *неограниченно снизу*, если

$$\forall m \in \boldsymbol{R}: \ \exists x_0 \in A \ \ x_0 < m .$$

Элемент $c_2 \in A$ называется ***наименьшим элементом*** множества A, если

$$\forall x \in A \ \ x > c_2 .$$

Множество, ограниченное сверху и снизу, называется ***ограниченным***:

$$\exists K > 0: \ \forall x \in A \ \ \ |x| \le K .$$

Определение 3. Наибольшая из всех нижних граней ограниченного снизу множества $A \subset \mathbf{R}$ называется ***точной нижней гранью***, т.е. выполняются два условия:

1) $\forall x \in A : x \ge m$,

2) $\forall m' > m \quad \exists x_0 \in A: x_0 \le m'$.

Обозначается: $m = \inf A$.

Определение 4. Наибольшая из всех нижних граней ограниченного снизу множества $A \subset \mathbf{R}$ называется ***точной верхней гранью***, т.е. выполняются следующие условия

1) $\forall x \in A: x \le M$,

2) $\forall M' < M \quad \exists x_0 \in A: x_0 \ge M'$.

Обозначается: $M = \sup A$.

Пример. Ограниченными множествами являются: $[a;b]$, $(a;b)$, множество значений $y = \sin x$ и т.д.

Среди подмножеств множества $\mathbf{R}$, существуют такие, которые не являются ограниченными. Они называются ***неограниченными множествами***.

Пример. Интервал $(a;+\infty)$, множество $\mathbf{N}$ является множествами, которые ограничены только снизу. Множества $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ не ограничены как сверху, так и снизу.

Для множеств, неограниченных сверху, полагают $\sup A = \infty$, а неограниченных снизу полагают $\inf A = -\infty$.

Примеры. 1. Пусть $A = [2;8]$, тогда

$$m = \inf A = 2, \; M = \sup A = 8.$$

2. Пусть $\mathbf{Z}_+$ – множество всех неотрицательных целых чисел. Тогда

$$m = \inf \{p \mid p \in \mathbf{Z}_+\} = 0,$$

$$M = \sup\{p \mid p \in \mathbf{Z}_+\} = +\infty.$$

3. Пусть $\mathbf{R}$ – множество действительных чисел. Тогда

$$m = \inf \mathbf{R} = -\infty, \; M = \sup \mathbf{R} = +\infty.$$

4. Пусть $A = \{x \mid x^2 < 7, x \in \mathbf{R}\}$. Тогда

$$m = \inf A = \inf \{x \in \mathbf{R} \mid -\sqrt{7} < x < \sqrt{7}\} = -\sqrt{7},$$

$$M = \sup\{x \in \mathbf{R} \mid -\sqrt{7} < x < \sqrt{7}\} = \sqrt{7}.$$

Теорема 1. *Ограниченное сверху (снизу) непустое множество имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.*

► Пусть A – непустое множество, ограниченное сверху, $A \ne \varnothing$. Тогда множество Y чисел, ограничивающих сверху множество A, непусто. Из определения верхней грани следует, что для любого $a \in A$ и любого $y \in Y$ имеет место неравенство $a \le y$.

Из свойства непрерывности множество действительных чисел следует, что существует $c \in \mathbf{R}$ такое, что $a \le c \le y$. Из неравенства $a \le c$ следует, что c ограничивает множество A сверху, из неравенства $y \ge c$ следует, что c есть наименьшая из всех верхних граней множества A. Значит, c – точная верхняя грань, т.е. $c = \sup A$.

Аналогично доказывается существование точной нижней грани для ограниченного снизу множества.◄

Точные грани множества A могут как принадлежать, так и не принадлежать ему.

В случае, если точная верхняя (нижняя) грань принадлежит множеству A, она совпадает с наибольшим (наименьшим) элементом этого множества, т.е. $\sup A = \max A$, $\inf A = \min A$.

Примеры. 1. Пусть $A = (a;b]$. Тогда

$$a = \inf A \notin A,\ b = \sup A \in A.$$

2. Пусть $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N} \right\}$. Тогда $\sup A = 1$, $\inf A = 0$. Точная верхняя грань достигается и равна наибольшему элементу множества A: $\sup A = \max A = 1$, нижняя грань $\inf A \notin A$.

2. Принцип вложенных отрезков.

Определение 5. Система числовых отрезков (рис.1)

$$[a_1;b_1],\ [a_2;b_2],\ \dots,\ [a_n;b_n], \dots,\ a_n \in \mathbf{R},\ b_n \in \mathbf{R},$$

называется ***системой вложенных отрезков***, если

1) каждый следующий отрезок содержится в предыдущем

$$[a_1;b_1] \supset [a_2;b_2] \supset \dots \supset [a_n;b_n] \supset \dots,$$

2) концы отрезков $\forall n \in \mathbf{N}$ удовлетворяют неравенству

$$a_n \le a_{n+1} < b_{n+1} \le b_n.$$

Рис.1. Система вложенных отрезков

Определение 6. Длины $b_n - a_n$ отрезков $[a_n;b_n]$, $a_n \in \mathbf{R}$, $b_n \in \mathbf{R}$ $\forall n \in \mathbf{N}$, называются ***стремящимися к нулю***, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех номеров $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $b_n - a_n < \varepsilon$.

Теорема 2. *Всякая система вложенных числовых отрезков, длины которых стремятся к нулю, имеет единственную точку, принадлежащую всем отрезкам.*

► *Существование.* Пусть

$$A = \{a_1; a_2; a_3; \ldots\} \text{ и } B = \{b_1; b_2; b_3; \ldots\}.$$

Из условия 1) определения 5 следует, что для любых номеров m и n выполняется неравенство $a_m \le b_n$. В силу свойства непрерывности множества действительных чисел **R** существует такое число ξ, что $\forall m, n \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство $a_m \le \xi \le b_n$. Если положить $m = n$, то получим $a_n \le \xi \le b_n$ $\forall n \in \mathbf{N}$. Значит, существует точка ξ, принадлежащая всем отрезкам, т.е. $\xi \in [a_n; b_n]$.

Единственность. Предположим противное. Пусть существует еще одна точка $\eta \ne \xi$, принадлежащая всем отрезкам системы, т.е. $\forall n \in \mathbf{N}$ $\eta \in [a_n; b_n]$. Тогда $\forall n \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство $|\eta - \xi| \le b_n - a_n$. По определению 6 $\forall \varepsilon > 0$ выполняются неравенство $|\eta - \xi| \le \varepsilon$. В силу произвольности ε положим $\varepsilon = \frac{1}{2}|\eta - \xi|$. Тогда $|\eta - \xi| \le \frac{1}{2}|\eta - \xi|$. Отсюда $1 < \frac{1}{2}$. Получили противоречие. Следовательно, существует единственная точка ξ, принадлежащая всем отрезкам $[a_n; b_n]$. ◄

Замечание. Число ξ ограничивает сверху множество $A = \{a_1; a_2; a_3; \ldots\}$ и снизу множество $B = \{b_1; b_2; b_3; \ldots\}$. Согласно определений верхней и нижней граней справедливы неравенства

$$a_n \le \sup A \le \xi \le \inf B \le b_n.$$

В силу единственности точки ξ, имеем $\sup A = \xi = \inf B$.

3. Перестановки и сочетания. Пусть задано конечное множество элементов.

Определение 7. Группы элементов, состоящие их одних и тех элементов и отличающиеся друг от друга только их порядком, называются ***перестановками***.

Теорема 3. *Число возможных перестановок из* n *элементов равно* $P_n = n!$.

Без доказательства.

Пример. Пусть дано множество $A = \{1;2;3\}$. Возможными перестановками элементов 1, 2, 3 являются: 123, 132, 213, 231, 321, 312. Число всевозможных перестановок $P_3 = 3! = 6$.

Определение 8. Каждое множество, содержащее k элементов из числа n заданных, называется ***сочетанием*** n ***элементов по*** k.

Пример. Множества $\{1;2\}$, $\{1;3\}$, $\{2;3\}$ образуют всевозможные сочетания из элементов множества $A = \{1;2;3\}$ по два.

Теорема 4. *Число всевозможных сочетаний из* n *элементов по* k *определяется по формуле*

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Без доказательства.

Число C_n^k можно последовательно находить с помощью треугольника Паскаля, который представляет собой треугольную таблицу. Первые и последние числа во всех строчках таблицы равны 1. Начиная с третьей строчки, каждое число в строчке, отличное от первого и последнего, получается сложением двух ближайших к нему чисел предшествующей строчки:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
. & . & . & & . & & . & . & . & &
\end{array}$$

В каждой n-ой строчке стоят последовательно числа C_n^0, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^n

Теорема 5 (формула бинома Ньютона).

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + b^n.$$

Без доказательства.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие множества называются ограниченными? Запишите с помощью кванторов ограниченного снизу множества.

2. Дайте определение точной верхней грани ограниченного сверху множества. Сформулируйте теорему о существовании точной грани у такого множества.

3. Дайте определение точной нижней грани ограниченного сверху множества. Сформулируйте теорему о существовании точной грани у такого множества.

4. Сформулируйте и докажите принцип вложенных отрезков.

Лекция 4. МНОЖЕСТВО КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

1. Понятие комплексного числа.
2. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа.

1. Понятие комплексного числа. Квадратное уравнение $x^2+1=0$ не имеет решения во множестве действительных чисел $\mathbf{R}$, так как не существует действительного числа, квадрат которого равен -1, поскольку $x^2 \geq 0$. Обозначим $i=\sqrt{-1}$. Тогда формальное решение уравнения $x^2+1=0$ можно записать в следующем виде: $x_{1,2}=\pm i$. Таким образом, возникла необходимость расширить множество действительных чисел $\mathbf{R}$ до нового числового множества, в котором все алгебраические уравнения

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n=0,$$

где $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbf{R}$, имели бы решения. Таким множеством является множество комплексных чисел.

Определение 1. ***Комплексным числом*** z называется выражение вида $x+iy$, где $x, y \in \mathbf{R}$, i удовлетворяет условию $i^2=-1$. При этом число x называется ***действительной частью***, число y – ***мнимой частью*** комплексного числа z, i – ***мнимой единицей***.

Обозначается: $z=x+iy$, $\operatorname{Re} z=x$, $\operatorname{Im} z=y$.

Запись комплексного числа в виде $z=x+iy$ называется ***алгебраической формой комплексного числа.***

Множество комплексных чисел *обозначается* $\mathbf{C}$.

Любое действительное число x можно рассматривать как комплексное число, т.е. $x=x+0\cdot i$. Поэтому множество действительных чисел содержится во множестве комплексных чисел, т.е. $\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$. Отсюда $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$.

Определение 2. Два комплексных числа $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$ называются ***равными*** тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части:

$$x_1+iy_1=x_2+iy_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=x_2, \\ y_1=y_2. \end{cases}$$

О п р е д е л е н и е 3 . Комплексное число $z = 0 + i \cdot 0$, называется ***нулем*** и *обозначается* 0.

Нуль во множестве комплексных чисел совпадает с числом 0 множества действительных чисел $0 + i0 = 0$.

Понятие *неравенства* для комплексных чисел существует лишь в смысле отрицания равенства, т.е. $z_1 \neq z_2$ означает, что число z_1 не равно числу z_2. Понятия «меньше» и «больше» для комплексных чисел не определены.

О п р е д е л е н и е 4 . Комплексное число $\bar{z} = x - iy$ называется ***сопряженным*** комплексному числу $z = x - iy$. Два комплексных числа, отличающихся лишь знаком при мнимой части, называются ***комплексно-сопряженными***.

Пример. Числа $z = 3 + 5i$ и $\bar{z} = 3 - 5i$ являются комплексно-сопряженными**.**

М о д у л ь и а р г у м е н т к о м п л е к с н о г о ч и с л а . Комплексное число $z = x + iy$ *геометрически* изображается на плоскости $\mathbf{R}^2$ *точкой* с координатами x, y, или *вектором* $\vec{z}$, проекции которого на оси Ox и Oy соответственно равны x и y. При этом координатная плоскость Oxy называется ***комплексной плоскостью***, ось абсцисс – ***действительной*** осью, ось ординат – ***мнимой*** осью комплексной плоскости.

Каждому комплексному числу $z = x + iy$ соответствует определенная точка $M(x, y)$ комплексной плоскости $\mathbf{C}$ (Oxy) и, наоборот, каждой точке $M(x, y)$ этой плоскости соответствует определенное число $z = x + iy$. Между точками плоскости $\mathbf{R}^2$ и элементами множества $\mathbf{C}$ (комплексными числами) существует взаимно однозначное соответствие. Поэтому комплексная плоскость $\mathbf{C}$ (Oxy) является геометрической моделью множества $\mathbf{C}$.

О п р е д е л е н и е 5 . ***Модулем*** комплексного числа $z = x + iy$ называется расстояние от точки $z(x, y)$ до начала координат: $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

О п р е д е л е н и е 6 . ***Аргументом*** комплексного числа $z = x + iy$ называется угол φ, который образует радиус-вектор точки $z(x, y)$ с положительным направлением оси Ox.

Обозначается: $\operatorname{Arg} z = \varphi$.

Для $z \neq 0$ аргумент z определяется равенствами (рис.1):

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \ \sin\varphi = \frac{y}{|z|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Модуль комплексного числа z определяется однозначно, а аргумент φ – с точностью до слагаемого $2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Главным значением аргумента называется значение аргумента, удовлетворяющее условию $-\pi < \varphi \leq \pi$.

Обозначается $\arg z$.

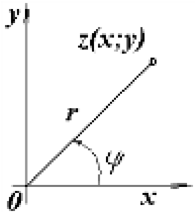

Рис.1. Геометрическое изображение комплексного числа $z = x + iy$

Тогда $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Если комплексные числа равны, то их модули равны, а аргументы отличаются на $2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Действия над комплексными числами в алгебраической форме. Операции над комплексными числами определяются таким образом, чтобы для их частного случая – действительных чисел – эти операции совпадали с известными. Основой при операциях над комплексными числами служит предположение $\left(\sqrt{-a}\right)^2 = -a$. Формально действия над комплексными числами производятся по тем же правилам, что и действия над многочленами (в частности, двучленами) с действительными коэффициентами, учитывая при этом $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ и т.д.

Суммой комплексных чисел называется комплексное число, действительная и мнимая части которого равны суммам соответствующих частей слагаемых:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Разностью комплексных чисел называется комплексное число, действительная и мнимая части которого равны разностям соответственно действительных и мнимых частей:

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Заметим, что сумма или разность двух комплексных чисел может оказаться числом действительным.

Сумма комплексно-сопряженных чисел есть

$$z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x \in \mathbf{R}.$$

Сложение (вычитание) комплексных чисел производится так же, как сложение и вычитание векторов: при сложении (вычитании) векторов их соответствующие координаты складываются (вычитаются). При этом модуль разности двух комплексных чисел

$$|z_1 - z_2| = |(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)| = |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)| =$$
$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

есть расстояние между точками z_1 и z_2.

Умножение комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ определяется формулой:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Произведение двух комплексно-сопряженных, не равных нулю, чисел равно положительному действительному числу. В самом деле,

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + xyi - xyi - y^2 i^2 = x^2 + y^2.$$

Деление комплексного числа z_1 ***на*** $z_2 \neq 0$ вводится как действие, обратное умножению, т.е. под ***частным*** $\frac{z_1}{z_2}$, $\forall z_2 \neq 0$, понимается комплексное число z, такое, что $z_2 \cdot z = z_1$.

Частное получается путем умножения числителя и знаменателя дроби $\frac{z_1}{z_2}$ на число $\bar{z}_2$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} =$$
$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Возведение комплексного числа z ***в степень*** n, $n \in \mathbf{N}$, рассматривается как умножение z на себя n раз.

Пример. $(x + iy)^3 =$

$$= x^3 + 3x^2(iy) + 3x(iy)^2 + (yi)^3 = \left(x^3 - 3xy^2\right) + \left(3x^2 y - y^3\right)i.$$

2. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. Любому комплексному числу $z \in \mathbf{C}$, заданному в алгебраической форме, соответствует точка комплексной плоскости, положение которой однозначно определяется ее декартовыми координатами x, y. Эту же точку z можно однозначно определить заданием аргумента и модуля.

Пусть на комплексной плоскости выбраны точка O и луч Or с началом в точке O. Совместим точку O с началом декартовой системы координат, а луч – с действительной осью x. Тогда каждой точке $z(x; y)$ можно поставить в соответствие два числа: r – полярный радиус, равный длине отрезка OM, и φ – полярный угол, равный углу между полярной осью и лучом OM; при этом $0 \le r < \infty$, $-\pi < \varphi \le \pi$. Числа r и φ называются ***полярными координатами*** точки M (рис. 2).

Из рисунка видно, что

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Тогда

$$z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Определение 7. Выражение

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

называется ***тригонометрической формой комплексного числа***.

Для того чтобы перейти от алгебраической формы комплексного числа $z = x + iy$ к тригонометрической с помощью формул, связывающих декартовы и полярные координаты, необходимо:

1) найти модуль комплексного числа $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$,

2) по формулам

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

найти главное значение аргумента $\varphi = \arg z$.

Пример. Изобразить в комплексной плоскости $\mathbf{C}$ (Oxy) число $z = -1 - i\sqrt{3}$ и представить его в тригонометрической форме.

Решение. Для геометрического изображения комплексного числа $z=-1-\sqrt{3}i$ построим точку $M\left(-1;-\sqrt{3}\right)$ и радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ (рис.3).

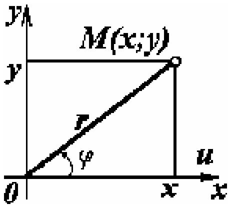

Рис. 2. Связь полярных и декартовых координат

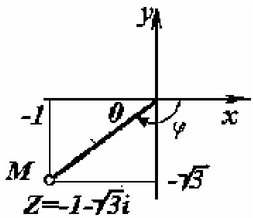

Рис. 3. Геометрическое изображение числа $z=-1-\sqrt{3}i$

Точка M и вектор $\overrightarrow{OM}$ являются геометрическим изображением комплексного числа z.

Представим комплексное число $z=-1-\sqrt{3}i$ в тригонометрической форме.

Модуль равен $|z|=\sqrt{(-1)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=2$.

Так как $\cos\varphi=-\dfrac{1}{2}$, $\sin\varphi=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то $\arg z=\varphi=-\dfrac{2\pi}{3}$.

Тогда $z=-1-\sqrt{3}i=2\left(\cos\left(-\dfrac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\dfrac{2}{3}\pi\right)\right)$.

Тригонометрической формой комплексного числа удобно пользоваться при выполнении операций умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня.

Пусть $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$, $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$.

Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме:

$$z_1z_2=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

► Имеем

$z_1z_2=r_1r_2(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=$

$=r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2)=$

$=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$.◄

Деление комплексных чисел в тригонометрической форме:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right).$$

►Имеем при $z_2\neq 0$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\frac{\cos(\varphi_1-\varphi_2)+in(\varphi_1-\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2}=\frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right).◄$$

Возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической форме:

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

► Число z^n, где $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $n\in\mathbf{N}$ можно рассматривать как умножение z на себя n раз:

$$z^n=\left(r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\right)^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

Отсюда $\left|z^n\right|=r^n$, $\arg z^n=n\arg z$. ◄

При $r=1$ из формулы следует ***формула Муавра:***

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi.$$

Извлечение корня из комплексного числа в тригонометрической форме:

$$z_k=\sqrt[n]{z_0}=\sqrt[n]{r_0}\left(\cos\frac{\varphi_0+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi_0+2k\pi}{n}\right),$$

где $n\in\mathbf{N}$, $k=0,2,...,n-1$.

► Корень $z_k=\sqrt[n]{z_0}$ степени $n\in\mathbf{N}$ из комплексного числа z_0 определяется как комплексное число z, которое, будучи возведено в степень n, дает число z_0, т. е. $z_k^n=z_0$. Запишем числа z_0 и z_k в тригонометрической форме:

$$z_0=r_0(\cos\varphi_0+i\sin\varphi_0),\ z_k=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Тогда $r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)^n=r_0(\cos\varphi_0+i\sin\varphi_0)$.

Отсюда $r^n=r_0$ и $n\varphi=\varphi_0+2k\pi$. Тогда $\varphi=\dfrac{\varphi_0+2k\pi}{n}$, $k\in\mathbf{Z}$, и $r=\sqrt[n]{r_0}$.

Итак,

$$z_k = \sqrt[n]{z_0} = \sqrt[n]{r_0}\left(\cos\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n}\right).$$

Так как функции $\cos$ и $\sin$ имеют период 2π, то корень степени n из числа z принимает точно n различных значений, соответствующих $k = 0,1,..., n-1$. ◄

В комплексной плоскости **C** точки, соответствующие различным значениям корня n-й степени из комплексного числа $z_0 = r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)$, располагаются в вершинах правильного n-угольника с центром в точке $O\ (0;0)$, причем одна из вершин (соответствующая $k = 0$) имеет полярные координаты $\sqrt[n]{r_0}$, $\dfrac{\varphi_0}{n}$.

Пример. Пусть $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$, $z_2 = 1 + i$. Требуется записать z_1 и z_2 в тригонометрической форме и найти $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, z_1^2, $\sqrt[3]{z_2}$.

Р е ш е н и е . Чтобы записать комплексное число $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$ в тригонометрической форме, найдем его модуль и аргумент:

$$|z_1| = \sqrt{1+3} = 2,$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2},\ \sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \arg z_1 = -\frac{\pi}{3}.$$

Тогда $z_1 = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$.

Представим $z_2 = 1 + i$ в тригонометрической форме.

Модуль равен

$$|z_2| = \sqrt{1+1} = 2,$$

аргумент есть

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \arg z_2 = \frac{\pi}{4}.$$

Тогда $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Найдем произведение $z_1 \cdot z_2$:

$$z_1 z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right).$$

Частное $\dfrac{z_1}{z_2}$ есть

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) - i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right).$$

Возведение в степень z_1^2:

$$z_1^2 = 2^2\left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right) = -2 - i2\sqrt{3}.$$

Извлечение корня $\sqrt[3]{z_2}$:

$$z_k = \sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi/4 + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi/4 + 2k\pi}{3}\right) =$$

$$= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{(8k+1)\pi}{12} + i\sin\frac{(8k+1)\pi}{12}\right), \; k = 0,1,2.$$

При $k = 0$ имеем $z_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}\right) = 1{,}084 + 0{,}291i$,

при $k = 1$ имеем $z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right) = -0{,}794 + 0{,}794i$,

при $k = 2$ имеем $z_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{17\pi}{12} + i\sin\dfrac{17\pi}{12}\right) = -0{,}291 - 1{,}084i$.

Модули всех z_j, $j = 0,1,2$ равны $\sqrt[6]{2} \approx 1{,}122$.

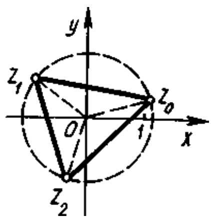

Рис.4. Изображение корней
$z_k = \sqrt[3]{1+i}$, $k = 0,1,2$

Построив эти точки в комплексной плоскости $\mathbf{C}\,(Oxy)$, видно, что они являются вершинами правильного треугольника, вписанного в окружность (рис. 4). Следовательно, точки z_0, z_1, z_2 лежат на окружности радиусом $r = 1{,}122$ с центром в начале координат.

Удобной формой комплексного числа является ***показательная форма***. Чтобы получить ее, воспользуемся формулой Эйлера, устанавливающей связь между показательной и тригонометрическими функциями:

$$\mathrm{e}^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi\,,\ \ \varphi \in \mathbf{R}\,,$$

где $\mathrm{e} = 2{,}7182818\ldots$ – иррациональное число, которое будет определено позднее.

Пусть комплексное число z записано в тригонометрической форме: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Используя формулу Эйлера, имеем:

$$z = r\,\mathrm{e}^{i\varphi}\,.$$

О п р е д е л е н и е 8. Выражение $z = r\,\mathrm{e}^{i\varphi}$ называется ***показательной формой*** комплексного числа.

Здесь $r = |z|$; $\varphi = \arg z + 2k\pi$; $k \in \mathbf{Z}$.

Функция $\mathrm{e}^{i\varphi}$ обладает свойствами показательной функции с действительным показателем, поэтому формулы умножения, деления, возведения в натуральную степень для комплексных чисел в показательной форме имеют простой вид.

Если $z_1 = r_1\,\mathrm{e}^{i\varphi}$, $z_2 = r_2\,\mathrm{e}^{i\varphi}$, то

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\,\mathrm{e}^{i(\varphi_1+\varphi_2)}\,.$$

Если $z_2 \neq 0$, то

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\frac{\mathrm{e}^{i\varphi_1}}{\mathrm{e}^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{i(\varphi_1-\varphi_2)}\,.$$

Если $n \in \mathbf{N}$, $z = r\,\mathrm{e}^{i\varphi}$, то

$$z^n = \left(r\,\mathrm{e}^{i\varphi}\right)^n = r^n\,\mathrm{e}^{in\varphi}\,.$$

$$z_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r\,\mathrm{e}^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r}\cdot\mathrm{e}^{\frac{i(\varphi+2k\pi)}{n}}\,,\ \ k = 0,1,2,\ldots,n-1\,.$$

Пример. Найти $z\cdot z_1$, $\dfrac{z}{z_1}$, $\sqrt[5]{z}$, z^{12}, если $z = 1-i$ и $z_1 = 1+\sqrt{3}i$.

Решение. Запишем z и z_1 в показательной форме.

Так как $|z| = \sqrt{2}$, $\arg z = \operatorname{arctg}(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$, то $z = \sqrt{2}\, e^{-\frac{i\pi}{4}}$.

Так как $|z_1| = 2$, $\arg z_1 = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$, то $z_1 = 2\mathrm{e}^{-\frac{i\pi}{3}}$.

Тогда получим: произведение $z \cdot z_1 = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{12}}$; частное $\dfrac{z}{z_1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\frac{i7\pi}{12}}$, корни $z_k = \sqrt[5]{z} = \sqrt[10]{2}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{2}{5}k\pi - \frac{\pi}{20}\right)}$, $k = 0,1,2,3,4$; возведение в степень $z^{12} = \left(\sqrt{2}\right)^{12} \mathrm{e}^{-3\pi i}$. Используя формулу Эйлера:

$$\mathrm{e}^{-3\pi i} = \cos 3\pi - i \sin 3\pi = -1.$$

Поэтому $z^{12} = -\left(\sqrt{2}\right)^{12} = -64$.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение множества комплексных чисел. Какие два комплексных числа называются равными, сопряженными? Приведите примеры.

2. Как изображаются комплексные числа на плоскости? Дайте определение модуля и аргумента комплексного числа.

3. Сформулируйте правила сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел в алгебраической форме.

4. Сформулируйте правила сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень комплексных чисел в тригонометрической форме.

5. Сформулируйте правила сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень комплексных чисел в показательной форме.

Тема 2
ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

Лекция 1. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

1.Определение числовой последовательности.
2. Ограниченные и неограниченные последовательности.
3. Бесконечно малые последовательности их свойства.
4. Бесконечно большие последовательности.

1. Определение числовой последовательности. Пусть $X \subseteq \mathbf{R}$, $X \neq \varnothing$, и $\mathbf{N}$ – множество натуральных чисел.

Определение 1. ***Числовой последовательностью*** элементов множества X называется отображение $f : \mathbf{N} \to X$. Значение $x_n = f(n)$ называется ***общим членом*** последовательности, числа $x_1, x_2, x_3, \ldots$ называются ***элементами*** (***членами***) последовательности.

Обозначается: $(x_1; x_2; \ldots; x_n; \ldots)$, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, (x_n), x_n .

Примеры. Последовательностями являются

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty} = \left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \ldots\right), \qquad (n)_{n=1}^{\infty} = (1;2;3;\ldots),$$

$$\left((-1)^n\right)_{n=1}^{\infty} = (-1;1;-1;\ldots), \quad (\sin n\alpha)_{n=1}^{\infty} = (\sin\alpha; \sin 2\alpha; \sin 3\alpha; \ldots).$$

Последовательность считается заданной, если указан способ получения ее любого элемента.

Ниже приведены **способы** задания последовательности.

1. *Формулой* n*-го члена*.

Например, $x_n = (-1)^n$.

2. *Рекуррентный*.

Например, числа Фибоначчи $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_{n+1} = x_{n-1} + x_n$.

3. *Словесный*.

Например, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – это приближение числа π по недостатку с точностью 10^{-n}:

$x_1 = 3{,}1$, $x_2 = 3{,}14$, $x_3 = 3{,}141$, $x_4 = 3{,}1415$ ... .

4. *Графический*:

– точками с координатами $(n; x_n)$, $n \in \mathbf{N}$, на плоскости $\mathbf{R}^2$,

– точками x_n, $n \in \mathbf{N}$, на числовой оси $\mathbf{R}$.

Пусть даны две последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$.

Определение 2. ***Суммой*** последовательностей $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ называется последовательность $(x_n + y_n)_{n=1}^{\infty}$, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов последовательностей

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} + (y_n)_{n=1}^{\infty} = (x_n + y_n)_{n=1}^{\infty}.$$

Определение 3. ***Произведением*** последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ***на число*** m называется последовательность $(m \cdot x_n)_{n=1}^{\infty}$, каждый элемент которой равен произведению соответствующего элемента последовательности на число m:

$$m \cdot (x_n)_{n=1}^{\infty} = (m \cdot x_n)_{n=1}^{\infty}.$$

Определение 4. ***Произведением*** последовательностей $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ называется последовательность $(x_n \cdot y_n)_{n=1}^{\infty}$, каждый элемент которой равен произведению соответствующих элементов последовательностей

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} \cdot (y_n)_{n=1}^{\infty} = (x_n \cdot y_n)_{n=1}^{\infty}.$$

Определение 5. Если все члены последовательности $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ отличны от нуля, то ***частным*** последовательностей $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ называется последовательность $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)_{n=1}^{\infty}$, каждый элемент которой равен частному соответствующих элементов последовательностей:

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \quad y_n \neq 0 \quad \frac{(x_n)_{n=1}^{\infty}}{(y_n)_{n=1}^{\infty}} = \left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n=1}^{\infty}.$$

2. Ограниченные и неограниченные последовательности. Пусть задана последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Определение 6. Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется ***ограниченной сверху (снизу)***, если существует число M (m) такое, что каждый элемент последовательности x_n удовлетворяет неравенству $x_n \leq M$ ($x_n \geq m$). Числа M и m называются

верхней и нижней гранями числовой последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Символическая запись:

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} - \textbf{\textit{ограничена сверху}} \Leftrightarrow \exists M \in \mathbf{R} : \forall n \in \mathbf{N} \;\; x_n \le M .$$

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} - \textbf{\textit{ограничена снизу}} \Leftrightarrow \exists m \in \mathbf{R} : \forall n \in \mathbf{N} \;\; x_n \ge m .$$

Пример. Последовательность $(-n)_{n=1}^{\infty}$ – является ограниченной сверху, так как все элементы последовательности не больше $M = -1$. Последовательность $(n)_{n=1}^{\infty}$ – является ограниченной снизу, так как все элементы последовательности не меньше $m = 1$.

Определение 7. Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется ***ограниченной***, если она ограничена сверху и снизу, т.е. существуют числа M и m такие, что каждый элемент x_n последовательности удовлетворяет неравенству $m \le x_n \le M$.

Символическая запись:

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} - \textbf{\textit{ограничена}} \Leftrightarrow \exists m, M \in \mathbf{R} : \forall n \in \mathbf{N} \;\; m \le x_n \le M .$$

Пусть $A = \max\{|m|, |M|\}$. Тогда условие ограниченности можно записать в виде $|x_n| \le A$.

Определение 8. Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется ***ограниченной***, если существует действительное число $A > 0$ такое, что каждый элемент последовательности x_n удовлетворяет неравенству $|x_n| \le A$.

Пример. Последовательность $\left(\dfrac{1}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ является ограниченной, так как каждый элемент x_n этой последовательности удовлетворяет неравенству $\dfrac{1}{2} \le x_n < 1$.

Определение 9. Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется ***неограниченной***, если для любого действительного числа $A > 0$ существует элемент x_n последовательности, удовлетворяющий неравенству $|x_n| \ge A$, т.е. либо $x_n \ge A$, либо $x_n \le A$.

Символическая запись:

$$\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty} - \textbf{\textit{неограниченна}} \Leftrightarrow \ \forall\, 0 < A \in \mathbf{R} \ \exists n \in \mathbf{N} : \left|x_n\right| \geq A .$$

Пример. Последовательность $\left(2n\right)_{n=1}^{\infty}$ является неограниченной, так как для любого положительного числа $A \in \mathbf{R}$ $x_n \geq A$ при $n \geq \dfrac{A}{2}$.

3. Бесконечно малые последовательности их свойства.

О п р е д е л е н и е 10. Последовательность $\left(\alpha_n\right)_{n=1}^{\infty}$ называется ***бесконечно малой***, если для любого малого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех номеров $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\left|\alpha_n\right| < \varepsilon$.

Символическая запись:

$$\left(\alpha_n\right)_{n=1}^{\infty} - \text{б.м.п.} \Leftrightarrow \ \forall\, \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N(\varepsilon) \quad \left|\alpha_n\right| < \varepsilon .$$

Неравенство $\left|\alpha_n\right| < \varepsilon$ равносильно $-\varepsilon < \alpha_n < \varepsilon$. Это означает, что начиная с некоторого номера $N(\varepsilon)$ все элементы α_n последовательности $\left(\alpha_n\right)_{n=1}^{\infty}$ лежат в промежутке $(-\varepsilon; \varepsilon)$.

Пример. Доказать, что последовательность $\left(\dfrac{1}{2n}\right)_{n=1}^{\infty}$ является бесконечно малой последовательностью.

Р е ш е н и е. Возьмем произвольное малое число $\varepsilon > 0$. Так как $\left|\dfrac{1}{2n}\right| < \varepsilon$, то для нахождения значений n, удовлетворяющих этому неравенству, достаточно его решить. Поскольку $n \in \mathbf{N}$, то $\dfrac{1}{2n} < \varepsilon$. Решая данное неравенство, получим $n > \dfrac{1}{2\varepsilon}$. Следовательно, в качестве $N(\varepsilon)$ можно взять целую часть числа $\dfrac{1}{2n}$: $N(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]$. Тогда неравенство $\left|\dfrac{1}{2n}\right| < \varepsilon$ будет выполнятся при всех номеров n, больших чем $N(\varepsilon)$.

Например, пусть $\varepsilon = 0{,}1$. Тогда $N(\varepsilon) = \dfrac{1}{2 \cdot 0{,}1} = 5$. Начиная с шестого номера все члены последовательности $\left(\frac{1}{2n}\right)_{n=1}^{\infty}$ меньше $\varepsilon = 0{,}1$.

Теорема 1. *Бесконечно малая последовательность* $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ *ограничена*.

► По определению бесконечно малой последовательности имеем

$$(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} - \text{б.м.п.} \;\Leftrightarrow\; \forall\, \varepsilon > 0 \;\exists N(\varepsilon) : \forall n \ge N(\varepsilon) \quad |\alpha_n| < \varepsilon.$$

Обозначим $A = \max\{\varepsilon; |\alpha_1|; |\alpha_2|; ...; |\alpha_{N-1}|\}$. Тогда, очевидно, что $|\alpha_n| \le A$ для любого n. ◄

Теорема 2. *Сумма и разность бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

► Пусть $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ бесконечно малые последовательности. По определению имеем

$$(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} - \text{б.м.п.} \;\Leftrightarrow\; \forall\, \varepsilon > 0 \;\exists N_1(\varepsilon) : \forall n \ge N_1(\varepsilon) \quad |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$(\beta_n)_{n=1}^{\infty} - \text{б.м.п.} \;\Leftrightarrow\; \forall\, \varepsilon > 0 \;\exists N_2(\varepsilon) : \forall n \ge N_2(\varepsilon) \quad |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Возьмем номер $N = \max\{N_1; N_2\}$. Тогда для всех $n > N$ одновременно выполняются два неравенства $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Значит,

$$|\alpha_n + \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

$$|\alpha_n - \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отсюда следует, что последовательности $(\alpha_n + \beta_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(\alpha_n - \beta_n)_{n=1}^{\infty}$ бесконечно малые. ◄

Теорема 3. *Произведение бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

► Пусть $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ бесконечно малые последовательности. По определению имеем

$$(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} - \text{б.м.п.} \;\Leftrightarrow\; \forall\, \varepsilon > 0 \;\exists N_1(\varepsilon) : \forall n \ge N_1(\varepsilon) \quad |\alpha_n| < \varepsilon,$$

$$\left(\beta_n\right)_{n=1}^{\infty} - \text{б.м.п.} \iff \forall\, \varepsilon = 1\ \exists N_2(\varepsilon): \forall n \geq N_2(\varepsilon)\quad \left|\beta_n\right| < 1.$$

Возьмем номер $N = \max\{N_1; N_2\}$. Тогда для всех $n > N$ одновременно выполняются два неравенства $\left|\alpha_n\right| < \varepsilon$ и $\left|\beta_n\right| < 1$.

Значит,

$$\left|\alpha_n \cdot \beta_n\right| = \left|\alpha_n\right| \cdot \left|\beta_n\right| < \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon .$$

Отсюда следует, что последовательность $\left(\alpha_n \cdot \beta_n\right)_{n=1}^{\infty}$ бесконечно малая. ◄

Теорема 4. *Произведение бесконечно малой последовательность $\left(\alpha_n\right)_{n=1}^{\infty}$ на ограниченную $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ есть бесконечно малая последовательность.*

► По определению ограниченной последовательности имеем

$$\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty} - \text{огран.} \iff \exists A > 0 : \forall n \in \mathbf{N}\quad \left|x_n\right| \leq A .$$

По определению бесконечно малой последовательности:

$$\left(\alpha_n\right)_{n=1}^{\infty} - \text{б.м.п.} \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N(\varepsilon)\quad \left|\alpha_n\right| < \frac{\varepsilon}{A} .$$

Тогда для всех $n \geq N(\varepsilon)$ выполняется

$$\left|\alpha_n \cdot x_n\right| = \left|\alpha_n\right| \cdot \left|x_n\right| < \frac{\varepsilon}{A} \cdot A = \varepsilon .$$

Это означает, что последовательность $\left(\alpha_n \cdot x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ есть бесконечно малая. ◄

4. Бесконечно большие последовательности.

Определение 11. Последовательность $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ называется ***бесконечно большой***, если для любого положительного числа $A > 0$ существует такой номер $N(A)$, что для всех номеров $n > N(A)$ выполняется неравенство $\left|x_n\right| > A$.

Символическая запись:

$$\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty} - \text{б.б.п.} \iff \forall\, A > 0\ \exists N(A): \forall n \geq N(A)\quad \left|x_n\right| > A.$$

Пример. Последовательность $\left(n+2\right)_{n=1}^{\infty}$ – является бесконечно большой последовательностью, так как решая неравенство $\left|n+2\right| > A$, получим $N(A) = A - 2$. Это значит, что, начиная с номера $A-1$ все элементы последовательности больше A. Положим $A = 100$. Тогда элементы последовательности с номерами

$n > N(A) = 98$, больше $A = 100$.

Замечание. Если последовательность бесконечно большая, то она неограниченна. Если последовательность неограниченна, то она не обязательно бесконечно большая.

Пример. Последовательность $(1;2;1;3;1;4;...;1;n;1;n+1;...)$ является неограниченной, однако не является бесконечно большой.

Теорема 5 (связь бесконечно большой и бесконечно малой последовательностей). *Если (x_n) бесконечно большая последовательность и все ее члены отличны от нуля, то последовательность $\left(\dfrac{1}{x_n}\right)$ является бесконечно малой последовательность.* Обратно: *если (α_n) бесконечно малая последовательность и все ее члены отличны от нуля, то последовательность $\left(\dfrac{1}{\alpha_n}\right)$ является бесконечно большой последовательностью.*

► По определению бесконечно большой последовательности имеем

$$(x_n),\ x_n \neq 0, -\text{б.б.п.} \Leftrightarrow\ \forall A > 0\ \exists N(A): \forall n \geq N(A)\quad |x_n| > A.$$

Возьмем $A = \dfrac{1}{\varepsilon} > 0$. Тогда $|x_n| > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Отсюда $\dfrac{1}{|x_n|} = \left|\dfrac{1}{x_n}\right| < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$ и всех номеров $n > N(\varepsilon)$. Значит последовательность $\left(\dfrac{1}{x_n}\right)$ бесконечно малая последовательность.

Аналогично доказывается обратное утверждение. ◄

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение числовой последовательности. Приведите примеры.

2. Какие арифметические действия можно выполнять над последовательностями?

3. Сформулируйте определения ограниченной сверху и снизу последовательности. Какая последовательность называется ограниченной?

4. Какая последовательность называется бесконечно малой последовательностью? Приведите примеры.

5. Перечислите свойства бесконечно малых последовательно-

стей.

6. Какая последовательность называется бесконечно большой последовательностью? Приведите примеры.

7. Является ли неограниченная последовательность бесконечно большой?

8. Сформулируйте теорему о связи бесконечно малой последовательности и бесконечно большой последовательности.

Лекция 2. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

1. Определение предела числовой последовательности.
2. Свойства сходящихся последовательностей.
3. Предельный переход в неравенствах.

1. Определение предела числовой последовательности.

Операция предельного перехода является одной из основных в математическом анализе.

Определение 1. Число a называется ***пределом*** последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, если для любого положительного действительного числа ε найдется такой номер $N(\varepsilon)$, что при всех $n > N(\varepsilon)$ элементы этой последовательности удовлетворяют неравенству $|x_n - a| < \varepsilon$.

Обозначается: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,

$$x_n \to a \text{ при } n \to \infty.$$

Символическая запись:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N(\varepsilon) \quad |x_n - a| < \varepsilon .$$

Последовательности, имеющие предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $a \in \mathbf{R}$, называются ***сходящимися*** (к числу a), а последовательности, не имеющие конечного предела, – ***расходящимися***.

Пример. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$.

Решение. Возьмем любое малое $\varepsilon > 0$. Найдем номер $N(\varepsilon)$. Из неравенства $\left|\dfrac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$ получим $\dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$. Отсюда $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$. Если взять $N(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\right]$, то для всех номеров $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\left|\dfrac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$.

Например, при $\varepsilon = 0{,}01$ последнее неравенство справедливо для членов последовательности с номерами $n = 100$, 101 , ...

Замечания. 1. Из неравенства $|x_n - a| < \varepsilon$ имеем $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Это означает, что начиная с номера $N(\varepsilon)$ все элементы последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ находятся в ε-окрестности точки a (рис.1).

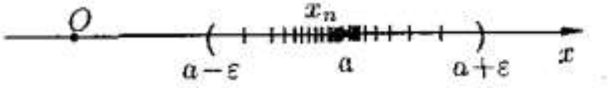

Рис.1. Геометрический смысл предела последовательности

2. Неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ означает, что последовательность $(x_n - a)_{n=1}^{\infty}$ является бесконечно малой последовательностью. Отсюда следует, что любую сходящуюся последовательность можно представить в виде $x_n = a + \alpha_n$, где α_n – бесконечно малая последовательность. Очевидно, что

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon): \forall n > N(\varepsilon) \ \ |\alpha_n| < \varepsilon .$$

3. Бесконечно большая последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ имеет бесконечный предел:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \ \Leftrightarrow \ \forall \ A > 0 \ \exists N(A): \forall n \geq N(A) \ \ |x_n| > A.$$

2. Свойства сходящихся последовательностей.

Лемма 1. *Если все элементы бесконечно малой последовательности $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ равны одному и тому же числу α, то $\alpha = 0$.*

► Доказываем методом от противного. Предположим, что $\alpha \neq 0$. По определению бесконечно малой последовательности

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbf{N}: \forall n > N(\varepsilon) \ \ |\alpha_n| < \varepsilon .$$

В силу произвольности ε положим $\varepsilon = \frac{|\alpha|}{2}$. Тогда $|\alpha_n| < \frac{|\alpha|}{2}$.

По условию $\forall n \in \mathbf{N} \quad \alpha_n = \alpha$. Подставим в неравенство: $|\alpha| < \frac{|\alpha|}{2}$. Отсюда при $\alpha \neq 0$ получим $1 < \frac{1}{2}$. ◄

Теорема 1. *Сходящаяся последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ имеет только один предел.*

► Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Доказываем методом от противного. Предположим, что существует еще один предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, причем $a \neq b$. Из определения предела имеем $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} = (x_n - a)_{n=1}^{\infty}$ и $(\beta_n)_{n=1}^{\infty} = (x_n - b)_{n=1}^{\infty}$ бесконечно малые последовательности. Отсюда $x_n = a + \alpha_n$ и $x_n = b + \beta_n$. Приравнивая, получим $a + \alpha_n = b + \beta_n$. Тогда все члены бесконечно малой последовательности $\alpha_n - \beta_n = a - b$ равны одному и тому же числу. По лемме 1 получим $a - b = 0$. Значит, $a = b$. ◄

Теорема 2. *Если последовательность* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *сходится, то она ограничена:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \;\Rightarrow\; \exists M \in \mathbf{R} : |x_n| \le M .$$

► Пусть $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – сходящаяся последовательность. По определению предела для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число $N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$, такое, что для любого $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство:

$$|x_n| = |x_n - a + a| \le |x_n - a| + |a| < |a| + \varepsilon ,$$

т.е. $|x_n| < |a| + \varepsilon$.

Пусть $M = \max\{|a| + \varepsilon; |x_1|, |x_2|, ..., |x_{n-1}|\}$. Тогда $|x_n| \le M$ $\forall n \in \mathbf{N}$, что и означает ограниченность числовой последовательности. ◄

Замечание. Обратное верно не всегда: ограниченная последовательность может и не иметь предела.

Пример. Последовательность $(-1)^n$ является ограниченной. Доказать, что она не имеет предела.

Решение. Предположим, что она имеет предел, равный a. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n = a \;\Leftrightarrow$$

$$\forall\, \varepsilon = \frac{1}{2}\;\exists N(\varepsilon) : \forall n \ge N(\varepsilon)\quad |(-1)^n - a| < \frac{1}{2} .$$

При $n = 2k$ получим $|1 - a| < \frac{1}{2}$, при $n = 2k - 1$ получим $|-1 - a| < \frac{1}{2}$ или $|1 + a| < \frac{1}{2}$. Тогда

$$2 = |1 - a + a + 1| \le |1 - a| + |a + 1| = |1 - a| + |1 + a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

т.е. $2 < 1$. Получили противоречие.

Значит, последовательность $(-1)^n$ не имеет предела.

Теорема 3. *Сумма (разность) двух сходящихся последовательностей есть сходящаяся последовательность, предел которой равен сумме пределов последовательностей:*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n .$$

► Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то можно записать $x_n = a + \alpha_n$. Аналогично, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то $y_n = b + \beta_n$. Здесь α_n и β_n бесконечно малые последовательности при $n \to \infty$. Тогда

$$x_n + y_n = a + \alpha_n + b + \beta_n = a + b + (\alpha_n + \beta_n).$$

Последовательность $(\alpha_n + \beta_n)_{n=1}^{\infty}$ есть бесконечно малая последовательность при $n \to \infty$. Следовательно, последовательность $(x_n + y_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится и имеет предел, равный $a + b$.

Аналогично для разности последовательностей. ◄

Теорема 4. *Произведение двух сходящихся последовательностей есть сходящаяся последовательность предел которой равен произведению пределов последовательностей:*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n .$$

► Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то можно записать $x_n = a + \alpha_n$ и $y_n = b + \beta_n$, где α_n и β_n бесконечно малые последовательности при $n \to \infty$. Тогда

$$x_n \cdot y_n = (a + \alpha_n)\cdot(b + \beta_n) = ab + a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n .$$

Последовательности $(\alpha_n \cdot \beta_n)_{n=1}^{\infty}$, $(a \cdot \beta_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b \cdot \alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ есть бесконечно малые последовательности при $n \to \infty$ согласно свойствам бесконечно малых последовательностей. Следовательно, последовательность $(x_n \cdot y_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится и имеет предел, равный $a \cdot b$.◄

Теорема 5. *Частное двух сходящихся последовательностей* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *и* $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \ne 0$, *есть сходящаяся последовательность, предел которой равен частному пределов последовательностей:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

►Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то можно записать $x_n = a+\alpha_n$ и $y_n = b+\beta_n$, где α_n и β_n бесконечно малые последовательности при $n\to\infty$. Тогда

$$\frac{x_n}{y_n}-\frac{a}{b}=\frac{bx_n-ay_n}{by_n}=\frac{b(a+\alpha_n)-a(b+\beta_n)}{by_n}=\frac{b\alpha_n-a\beta_n}{by_n}=$$

$$=\frac{1}{y_n}\cdot\frac{b\alpha_n-a\beta_n}{b}=\frac{1}{y_n}\cdot\left(\alpha_n-\frac{a}{b}\cdot\beta_n\right).$$

Последовательность $\left(\alpha_n-\frac{a}{b}\cdot\beta_n\right)_{n=1}^{\infty}$ является бесконечно малой в силу свойств бесконечно малых последовательностей.

Покажем, что последовательность $\left(\frac{1}{y_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ есть ограниченная последовательность.

По определению предела имеем

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a \;\Leftrightarrow\; \forall\, \varepsilon=\frac{|b|}{2}\;\; \exists N(\varepsilon): \forall n\ge N(\varepsilon)\Rightarrow |y_n-b|<\frac{|b|}{2}.$$

Тогда

$$|y_n|=|b-(b-y_n)|\ge|b|-|b-y_n|=|b|-|y_n-b|>|b|-\frac{|b|}{2}=\frac{|b|}{2},$$

т.е. $|y_n|>\frac{|b|}{2}$.

Отсюда $\left|\frac{1}{y_n}\right|<\frac{2}{|b|}$ для любого $n\in\mathbf{N}$.

По свойству бесконечно малых последовательностей, последовательность $\left(\frac{1}{y_n}\cdot\left(\alpha_n-\frac{a}{b}\cdot\beta_n\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ есть бесконечно малая последовательность.

Следовательно, последовательность $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ является сходящейся и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{a}{b}$. ◄

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n-5}{2n+3}$.

***Решение*.**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8n-5}{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{8-\frac{5}{n}}{2+\frac{3}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(8-\frac{5}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}\right)}==\frac{\lim\limits_{n\to\infty}8-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=$$

$$=\frac{8-0}{2+0}=\frac{8}{2}=4.$$

3. Предельный переход в неравенствах.

Теорема 6. *Если все элементы сходящейся последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству $x_n\ge b$ ($x_n\le b$), то и предел этой последовательности удовлетворяет неравенству $a\ge b$ ($a\le b$).*

► Доказываем методом от противного. Предположим, что выполняется неравенство $a<b$.

По определению предела

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \iff \forall\,\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon):\forall n\ge N(\varepsilon)\quad |x_n-a|<\varepsilon.$$

Положим $\varepsilon=b-a$. Тогда $|x_n-a|<b-a$. После несложных преобразований получим $2a-b<x_n<b$. Из правой части этого неравенства $\forall\,n>N(\varepsilon)$ имеем $x_n<b$. Это противоречит условию, что $x_n\ge b$. Значит, справедливо неравенство $a\ge b$.

Аналогично доказывается случай $a\le b$. ◄

Теорема 7 (о промежуточной переменной). *Пусть последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ таковы, что:*

1) $\forall\ n\in\mathbf{N}$ выполняется неравенство $x_n\le y_n\le z_n$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$.

Тогда последовательность $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$.

► По определению предела имеем

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists N_1(\varepsilon): \forall n \ge N_1(\varepsilon) \quad |x_n - a| < \varepsilon .$$

Из последнего неравенства $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$.

Аналогично

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists N_2(\varepsilon): \forall n \ge N_2(\varepsilon) \quad |z_n - a| < \varepsilon .$$

Отсюда $a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$.

Возьмем $N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon); N_2(\varepsilon)\}$. Тогда для всех $n > N(\varepsilon)$ выполняются неравенства одновременно

$$a - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a + \varepsilon .$$

Отсюда $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$ или $|y_n - a| < \varepsilon$.

Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. ◄

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение предела последовательности.

2. Запишите с помощью логических символов определение расходящейся последовательности и дайте геометрическую интерпретацию этого определения.

3. Перечислите свойства сходящихся последовательностей.

4. Какие арифметические действия справедливы над сходящимися последовательностями?

5. Сформулируйте и докажите теорему о промежуточной переменной.

Лекция 3. МОНОТОННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

1. Монотонные последовательности.
2. Число e.
3. Принцип выбора.
4. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши. Теорема о вложенных отрезках.

1. Определение монотонной последовательности.

Определение 1. Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется ***неубывающей***, если ее элементы удовлетворяют условию:

$$x_1 \le x_2 \le \dots \le x_n \le \dots.$$

Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется ***возрастающей***, если ее элементы удовлетворяют условию: $x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$.

Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется ***невозрастающей***, если ее элементы удовлетворяют условию: $x_1 \ge x_2 \ge \dots \ge x_n \ge \dots$.

Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется ***убывающей***, если ее элементы удовлетворяют условию: $x_1 > x_2 > \dots > x_n > \dots$.

Определение 2. Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется ***монотонной***, если удовлетворяет неравенствам определения 1. Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется ***строго монотонной***, если она возрастающая или убывающая.

Пример. Последовательность $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ является убывающей, $(2n-1)_{n=1}^{\infty}$ – возрастающей, $(1;1;3;3;5;5;\dots)$ – неубывающей, $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{4};\dots\right)$ – невозрастающей.

Очевидно, что монотонные последовательности ограничены, по крайней мере, с одной стороны: неубывающие снизу, невозрастающие сверху.

Терема 1 (Вейерштрасса). *Каждая ограниченная монотонная последовательность сходится.*

► Пусть последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ неубывающая, т.е. $x_1 \le x_2 \le \dots \le x_n \le \dots$.

Поскольку $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ограничена, то $\forall n \in \mathbf{N} \ \ \exists M : x_n \le M$.

Рассмотрим множество $X = \{ x_1; x_2; ...; x_n ... \}$ значений последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. В силу условия, оно не пусто и ограничено. Тогда это множество имеет точную верхнюю грань $\sup X = a$. Согласно определению верхней грани

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon): \quad x_{N(\varepsilon)} > \sup X - \varepsilon \text{, т.е. } x_{N(\varepsilon)} > a - \varepsilon .$$

С другой стороны, по определению верхней грани $\forall n \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство $x_{N(\varepsilon)} \le a < a + \varepsilon$.

Тогда $\forall \ n > N(\varepsilon)$ получим $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Отсюда $|x_n - a| < \varepsilon$, что означает $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

Аналогично теорема доказывается в случае, когда последовательность невозрастающая. ◄

Замечание. Обратное верно не всегда: не всякая сходящаяся последовательность является монотонной.

Пример. Последовательность $\left(\frac{(-1)^n}{2n} \right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, ... \right)$ сходится, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{(-1)^n}{2n} = 0$, но она не является монотонной.

2. Число e .

Терема 2. *Последовательность* $x_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ *имеет предел, равный* e *:*

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e .$$

► *Шаг 1.* Докажем, что последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ монотонна.

Применяя формулу бинома Ньютона, имеем

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n =$$

$$1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Тогда

$$x_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=$$
$$=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\ldots+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

Поскольку $1-\frac{k}{n}<1-\frac{k}{n+1}$ для всех k, $0<k<n$, то каждое слагаемое в x_{n+1} больше каждого слагаемого в x_n. Потому для любого n верно $x_n<x_{n+1}$.

Шаг 2. Докажем, что последовательность $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ограничена.

Для каждого члена последовательности имеем

$$2\le x_n\le 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}<3,$$

т.е. $2\le x_n\le 3$.

Итак, последовательность $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ возрастает и ограничена. По теореме Вейерштрасса она сходится и $2\le\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le 3$.

Обозначим $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$, где число e удовлетворяет $2<e<3$ и будет найдено позднее.◄

В математическом анализе e играет особую роль. Показательная функция $y=e^x$ называется ***экспонентой*** и иногда обозначается $y=\exp(x)$. Логарифмы по основанию e называются ***натуральными***, их обозначаются

$$\ln a=\log_e a.$$

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+3}\right)^n$.

Р е ш е н и е . Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^n=\left(1^\infty\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-4}{n+3}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-4}{n+3}\right)^{\frac{n+3}{-4}\cdot\left(\frac{-4}{n+3}\right)\cdot n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-4}{n+3}\right)^{\frac{n+3}{-4}}\right)^{\frac{-4n}{n+3}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-4n}{n+3}}=e^{-4}.$$

3. Принцип выбора. Рассмотрим последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Если удалить часть элементов так, чтобы оставшихся элементов осталось бесконечно много, то получим ***подпоследовательность*** (частичная последовательность)

$$\left(x_{k_n}\right)_{n=1}^{\infty}=\left(x_{k_1};x_{k_2};x_{k_3};\ldots\right),$$

где $k_1<k_2<k_3<\ldots$.

Саму последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ можно рассматривать как подпоследовательность.

Пример. Последовательность $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ имеет подпоследовательности: $\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $\left(\dfrac{1}{2n}\right)$, $\left(\dfrac{1}{2n+1}\right)$, $\left(\dfrac{1}{n+5}\right)$ и другие.

О п р е д е л е н и е 3 . ***Частичным пределом*** последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется предел ее подпоследовательности $\left(x_{k_n}\right)_{n=1}^{\infty}$.

О п р е д е л е н и е 4 . Наибольший частичный предел числовой последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется ***верхним пределом***.

Обозначается: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n$.

Наименьший частичный предел числовой последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется ***нижним пределом***.

Обозначается: $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n$.

Пример. Последовательность $x_n = (-1)^n$ имеет верхний предел

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(-1)^n = \lim_{k\to\infty}(-1)^{2k} = 1,$$

и нижний предел

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(-1)^n = \lim_{k\to\infty}(-1)^{2k-1} = -1.$$

Теорема 3. *Если последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится к пределу a, то любая ее подпоследовательность $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ сходится к этому же самому пределу a.*

► По определению предела

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \;\Leftrightarrow\; \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \ge N(\varepsilon) \;\; |x_n - a| < \varepsilon .$$

И пусть $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ произвольная подпоследовательноть последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Можно найти номер k_N такой, что $k_N \ge N$, что для всех номеров $n > N$ элементы подпоследовательности $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяют неравенству $|x_{k_n} - a| < \varepsilon$. Это значит, что $\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = a$. ◄

Если все подпоследовательности $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ сходятся к одному и тому же пределу a, то и сама последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится к пределу a.

Теорема 4. *Любая последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ содержит монотонную подпоследовательность $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$*.

► *Случай 1.* Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ не имеет наибольшего элемента.

Пусть последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ после удаления $(m-1)$ элементов имеет остаток x_m, x_{m+1}, ... без наибольшего элемента. Тогда и все последующие остатки такими элементами не обладают. Обозначим $k_1 = m$. В остатке, начинающемуся с x_{k_1}, нет наибольшего элемента. Поэтому можно найти x_{k_2} такое, что $x_{k_1} < x_{k_2}$, где $k_1 < k_2$. Затем рассмотрим остаток последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, начинающийся с элемента x_{k_2}. Выберем x_{k_3} такое, что $x_{k_2} < x_{k_3}$, где $k_2 < k_3$. Аналогично поступая дальше, получим возрастающую последовательность $\{x_{k_1}; x_{k_2}; x_{k_3}; \ldots\}$.

Случай 2. Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ имеет наибольший элемент. И пусть x_{k_1} один из наибольших элементов остатка, начинающегося с x_1. Обозначим x_{k_2} наибольший элемент остатка, начинающегося с элемента x_{k_1}. Поступая таким образом дальше, получим невозрастающую последовательность $x_{k_1} > x_{k_2} > x_{k_3} > \ldots$. ◄

Теорема 5 (принцип выбора). *Любая ограниченная последовательность* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *имеет сходящуюся подпоследовательность* $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$.

► По теореме 4 можно выбрать монотонную последовательность $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$, которая является ограниченной. По теореме Вейерштрасса последовательность $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ является сходящейся.◄

4. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши.

Определение 4. Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется ***фундаментальной***, если для любого малого действительного числа ε найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех номеров n, больших $N(\varepsilon)$ и любого $p \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство $\left|x_{n+p} - x_n\right| < \varepsilon$.

Символическая запись:

$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальна $\Leftrightarrow$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N(\varepsilon) \text{ и } \forall\, p \in \mathbf{N} \qquad \left|x_{n+p} - x_n\right| < \varepsilon .$$

Геометрически это означает, что если последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальна, то $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon)$ такое, что расстояние между любыми двумя членами последовательности с номерами, большими, чем $N(\varepsilon)$, меньше ε .

Теорема 6 (критерий Коши сходимости последовательно-

сти). *Для того, чтобы последовательность* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

► *Необходимость*. Поскольку последовательность сходится, то согласно определению предела, имеем

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon): \forall n \ge N(\varepsilon)\ |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда $\forall\, p \in \mathbf{N}$

$$|x_{n+p} - x_n| = |x_{n+p} - a + a - x_n| \le |x_{n+p} - a| + |a - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Значит, последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальна.

Достаточность. Поскольку последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальна, то по определению имеем

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon): \forall n \ge N(\varepsilon) \text{ и } \forall\, p \in \mathbf{N} \quad |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

Отсюда $x_n - \varepsilon < x_{n+p} < x_n + \varepsilon$. Из этого неравенства заключаем, что, зафиксировав номер $N(\varepsilon)$, все остальные элементы последовательности с большими номерами лежат в окрестности точки x_n.

Положим

$$A = \max\left\{ |x_1|; |x_2|; \ldots; |x_{N(\varepsilon)} - \varepsilon|; |x_{N(\varepsilon)} + \varepsilon| \right\}.$$

Тогда $\forall n \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство $|x_n| \le A$. Значит, последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – ограничена.

Согласно принципу выбора из этой последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\left(x_{k_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = a$.

Из фундаментальности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ можно записать $|x_{k_n} - x_n| < \varepsilon$.Переходя в данном неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получим $|a - x_n| < \varepsilon$. Следовательно, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ является сходящейся.◄

Пример. Исследовать последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ на сходимость, если

$$x_n = 1 + \frac{\cos 1}{2} + \frac{\cos 2}{2^2} + \ldots + \frac{\cos n}{2^n}\ .$$

Решение. Для любого $p \in \mathbf{N}$

$$\left|x_{n+p} - x_n\right| = \left|\frac{\cos(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\cos(n+2)}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{\cos(n+p)}{2^{n+p}}\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p}} < \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p}} + \ldots =$$

$$= \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} < \varepsilon\ .$$

Тогда $n > -\log \varepsilon$.

Полагая $N(\varepsilon) = [-\log \varepsilon] + 1$, заключаем, что последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальна. Согласно критерию Коши, она сходится. Однако, чему равен ее предел, неизвестно.

Вопросы для самоконтроля

1. Какая последовательность называется монотонной? Приведите примеры монотонных и строго монотонных последовательных последовательностей.

2. Сформулируйте теорему Вейерштрасса. Является ли ограниченность последовательности необходимым и достаточным условием сходимости: а) монотонной последовательности, б) произвольной последовательности?

3. Сформулируйте определение подпоследовательности. Является ли сама последовательность подпоследовательностью?

4. Что называется нижним и верхним пределом последовательности? Сформулируйте принцип выбора.

5. Дайте определение фундаментальной последовательности и сформулируйте критерий Коши.

Лекция 4. ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Понятие функции.
2. Основные свойства функций.
3. Сложная и обратная функция.
4. Способы задания функции.

1. Понятие функции. Пусть D – произвольное подмножество действительных чисел, $D \subseteq \mathbf{R}$.

Определение 1. Если каждому числу $x \in D$ поставлено в соответствие единственное действительное число $y = f(x)$, то говорят, что на множестве D определена ***числовая функция*** f. Переменная x называется ***независимой переменной*** или ***аргументом***, y – ***зависимой переменной***, множество D называется ***областью определения*** функции, а множество – ***множеством значений*** функции.

Если о функции говорить как об отображении $f : D \to E$, то $f(x)$ называется ***образом элемента*** x, а x – ***прообразом элемента*** $f(x)$. При этом множество E называется ***образом множества*** D, множество D – ***прообразом множества*** E. Чтобы определить функцию $y = f(x)$, нужно задать множество D и закон (правило, соответствие) f, переводящий элементы x множества D в элементы y множества E.

2. Основные свойства функций. Одной из основных задач математического анализа является анализ функций. Изучить или проанализировать функцию $y = f(x)$ – значит охарактеризовать поведение этой функции на области определения $D(f)$ и построить ее график.

Средствами элементарной математики для функции $y = f(x)$ с областью определения $D(f)$ в большинстве случаев можно определить следующие характеристики.

1. Нули функции и знак функции на множестве $D(f)$.

Определение 2. Значение $x \in D(f)$ при котором функция $y = f(x)$ обращается в нуль, называется ***нулем функции***, т.е. нули функции являются корнями уравнения $f(x) = 0$.

В интервале, на котором функция положительна, график ее расположен выше оси Ox, а в интервале, на котором она отрицательна,– ниже оси Ox; в нуле функции график имеет общую точку с осью Ox.

2. Четность и нечетность функции.

Определение 3. Числовая функция $y = f(x)$ называется ***четной*** (***нечетной***), если выполняются следующие условия:

1) область ее определения симметрична относительно точки O, т. е. $\forall\ x \in D(x)\ \exists\ (-x)$: $(-x) \in D(x)$;

2) $\forall\ x \in D(x)\ f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$).

Существуют функции, которые не являются ни четными, ни нечетными. Они называются функциями ***общего*** вида.

Ось Oy является осью симметрии графика любой четной функции, а начало координат – центром симметрии графика нечетной функции. Графики функций, не обладающих свойствами четности или нечетности, не симметричны. При изучении поведения четной (нечетной) функции достаточно изучить ее при любом $x > 0$ и продолжить это изучение по симметрии на любое $x < 0$.

3. Периодичность функции.

Определение 4. Функция $y = f(x)$ называется ***периодической***, если для нее существует такое число $T \neq 0$, что выполняются следующие условия:

1) $\forall\ x \in D(f)\ x - T,\ x + T \in D(f)$;

2) $f(x) = f(x - T) = f(x + T)$.

Число $T \neq 0$ называется ***периодом*** функции.

Если число *T* является периодом функции $y = f(x)$ для любого $n \in \mathbf{N}$, то число nT – также период этой функции. Если существует наименьший положительный период функции, то он называется ***основным периодом***. Если T – период функции $y = f(x)$, то достаточно построить график на одном из интервалов длиной *T*, а затем произвести параллельный перенос его вдоль оси Ox на $\pm Tk$, $k \in \mathbf{Z}$. Если функция $f(x)$ – периодическая с периодом *T*, то функция $f(kx)$ – также периодическая с периодом $\frac{T}{|k|}$.

К периодическим функциям относится постоянная функция $f(x)=c$, $c=\text{const}$, $D(f)=\mathbf{R}$. Любое число $T\in\mathbf{R}$ является периодом этой функции, но наименьшего (основного) периода T функция не имеет.

4. Монотонность функции.

Определение 5. Функция $y=f(x)$ называется ***возрастающей (убывающей)*** на множестве X, если большему значению аргумента из этого множества соответствует большее (меньшее) значение функции (рис.1,а,б).

$f(x)$ *возрастает на* $X \Leftrightarrow \forall x_1,x_2\in X: x_1<x_2 \quad f(x_1)<f(x_2)$;

$f(x)$ *убывает на* $X \Leftrightarrow \forall x_1,x_2\in X: x_1<x_2 \quad f(x_1)>f(x_2)$.

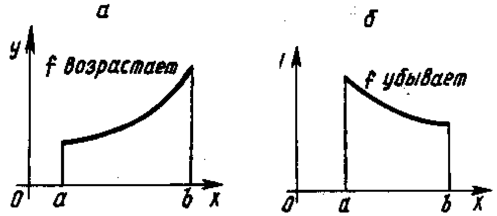

Рис.1. Возрастающая (а) и убывающая (б) функции

Определение 6. Функция $y=f(x)$ называется ***неубывающей (невозрастающей)*** на множестве X, если большему значению аргумента из этого множества соответствует не меньшее (не большее) значение функции (рис.2,а,б):

$f(x)$ *не убывает на* $X \Leftrightarrow \forall x_1,x_2\in X: x_1<x_2 \quad f(x_1)\le f(x_2)$;

$f(x)$ *не возрастает на* $X \Leftrightarrow \forall x_1,x_2\in X: x_1<x_2 \quad f(x_1)\ge f(x_2)$.

Возрастающие и убывающие функции называются ***строго монотонными***, а неубывающие и невозрастающие – ***монотонными***.

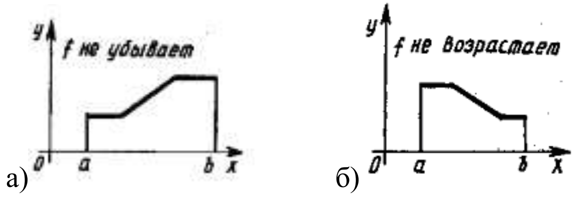

Рис.2. Неубывающая (а) и невозрастающая (б) функции

5. Ограниченность функции.

Определение 7. Функция $y = f(x)$ называется ***ограниченной сверху (снизу)*** на множестве $X \subseteq D(f)$, если существует такое число $M \in \mathbf{R}$, что при любых $x \in X$ выполняется условие $f(x) \le M$ ($f(x) \ge M$):

$$f(x) \text{ ограничена сверху на } X \Leftrightarrow$$
$$\exists M \in \mathbf{R} : \forall x \in X \quad f(x) \le M ;$$
$$f(x) \text{ ограничена снизу на } X \Leftrightarrow$$
$$\exists M \in \mathbf{R} : \forall x \in X \quad f(x) \ge M .$$

Определение 8. Функция $y = f(x)$ называется ***ограниченной на множестве*** $X \subseteq D(f)$, если существует такое положительное число M, что $\forall\, x \in X$ выполняется условие $|f(x)| \le M$:

$$f(x) \text{ ограничена на } X \Leftrightarrow \exists M \in \mathbf{R} : \forall x \in X \Rightarrow |f(x)| \le M .$$

Функция $y = f(x)$ называется ***неограниченной сверху*** (***снизу***) на множестве $X \subseteq D(f)$ если условия ограниченности (опред.9) не выполняются.

3. Сложная и обратная функция. Сложная функция. Пусть на некотором множестве D определена числовая функция $u = \varphi(x)$ и X – множество значений функции u. И пусть на множестве $X \subseteq D(f)$ задана функция $y = f(u)$, $D(f) \subseteq E(u)$. Тогда функция φ переводит элементы x в элементы u, а функция f переводит элементы u в элементы y:

$$x \overset{\varphi}{\mapsto} u \overset{f}{\mapsto} y .$$

Таким образом, каждому значению $x \in D(f)$ ставится в соответствие (посредством промежуточной переменной u) одно значение $y \in E(f)$, где $E(f)$ – множество значений функции $y = f(u)$:

$$E(f) = \{y \in \mathbf{R} | y = f(u), u = \varphi(x), x \in D(\varphi)\}.$$

В этом случае y называется ***сложной функцией*** (***композицией функций*** f ***и*** φ) аргумента x. При этом функция $u = \varphi(x)$

называется ***промежуточным аргументом***, x – ***независимым аргументом***.

Обозначается: $y = f(\varphi(x))$ или $f \circ \varphi$.

Пример. Сложными являются функции: $y = \ln(2x+6)$, $y = \sin^2 x$, $y = \arcsin(e^x)$, $y = \sqrt{\sin(1/x^2)}$, $y = \lg(\sin x)$ и т.д.

Обратная функция. Пусть задана взаимно-однозначная функция $y = f(x)$, где $D(f)$ – область определения; $E(f)$ – множество значений функции $y = f(x)$.

При взаимно однозначном отображении множества D на множество E каждый элемент y множества E является образом одного и только одного элемента x множества D и наоборот, т.е.

$y = f(x)$ – *взаимно однозначная функция* $\Leftrightarrow$

$$\forall x \in D \ \exists! y \in E : y = f(x);$$

$$\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2 : \ f(x_1) \neq f(x_2).$$

Пример. Функция $y = x^3$, $D(f) = E(f) = \mathbf{R}$, является взаимно однозначной. Отображение f является биективным отображением множества $\mathbf{R}$ на множество $\mathbf{R}$, так как каждому значению $x \in \mathbf{R}$ соответствует единственный элемент $y \in \mathbf{R}$, такой, что $y = x^3$. И, наоборот, каждому элементу $y \in \mathbf{R}$ соответствует только один элемент $x \in \mathbf{R}$, такой, что $x = \sqrt[3]{y}$ (рис.3). Так как каждому элементу $y \in E(y)$ ставится в соответствие единственный элемент $x \in D$, то соотношение $x = \sqrt[3]{y}$ является функцией, обратной к функции $y = x^3$.

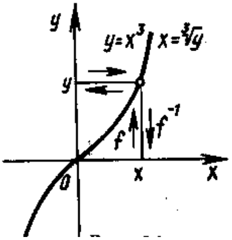

Рис.3. Взаимно-однозначная функция

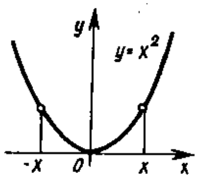

Рис.4. Функция, не являющаяся взаимно-однозначной

Пусть $y = f(x)$ – взаимно однозначное (биективное) отображение. Так как при биективном отображении каждому элементу $y \in E(f)$ ставится в соответствие единственный элемент $x \in D(f)$, то говорят, что на множестве E определена функция; ***обратная*** к функции $y = f(x)$.

Обозначается: $x = f^{-1}(y)$ или f^{-1}.

Если функция f^{-1} является обратной по отношению к функции f, то функция f является обратной по отношению к f^{-1}, т.е. $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$. Функции f и f^{-1} называются ***взаимно обратными***.

Пример. Функция $y = x^2$ (рис.4), $D(f) = \mathbf{R}$, $E(f) = \mathbf{R}_+$, не является взаимно однозначной. Действительно, для каждого элемента (образа) $y \in E$ существует два прообраза $(-x)$ и x, т.е. обратное отображение $f^{-1} : E \to D$ не является функцией, так как любому $y \in E$ соответствует не один, а два элемента x.

Теорема 1. *Если числовая функция $y = f(x)$ строго монотонна, то существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$. При этом, если f – возрастающая функция, то f^{-1} – возрастающая; если f – убывающая, то f^{-1} – убывающая.*

Без доказательства.

Если же у обратной функции, так же как и у данной, аргумент обозначить через x, а зависимую переменную через y, то обратная функция запишется в виде $y = f^{-1}(x)$.

Функции $x = f^{-1}(y)$ и $y = f^{-1}(x)$ различаются только обозначением зависимой и независимой переменных. Поэтому, чтобы из графика функции $x = f^{-1}(y)$ совпадающего с графиком функции $y = f(x)$, получить график функции $y = f^{-1}(x)$, достаточно поменять местами оси Ox и Oy , т.е. повернуть плоскость чертежа вокруг биссектрисы первого координатного угла. Таким образом, график обратной функции $y = f^{-1}(x)$ симметричен графику данной функции $y = f(x)$ относительно биссектрисы первого координатного угла.

Для того чтобы найти обратную функцию для взаимно однозначной функции $y=f(x)$, необходимо, решая уравнение $y=f(x)$ относительно x, определить $x=f^{-1}(y)$; меняя обозначения переменной x на y, а y на x, получить функцию $y=f^{-1}(x)$, обратную к данной функции.

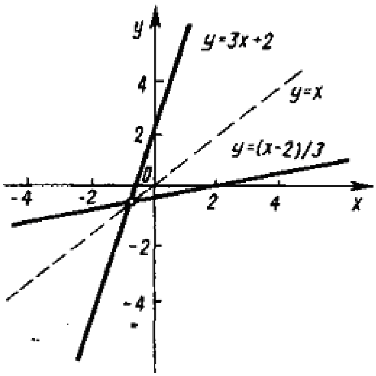

Рис.5. Графики функции $y=3x+2$

и обратной ей $y=f^{-1}(x)=\dfrac{x-2}{3}$

Пример. Показать, что функция $y=3x+2$ имеет обратную, и найти ее аналитическое выражение.

Решение. Функция $y=3x+2$ $\forall x\in\mathbf{R}$ монотонно возрастает. Следовательно, имеет обратную. Решив уравнение $y=3x+2$ относительно x, получим $x=f^{-1}(y)=\dfrac{y-2}{3}$. Поменяв местами обозначения, найдем обратную функцию

$$y=f^{-1}(x)=\frac{x-2}{3}.$$

Графики функций изображены на рисунке 5.

4. Способы задания функции. Различают следующие способы задания функции.

Аналитический способ задания функции состоит в том, что с помощью формулы устанавливается алгоритм вычисления значений функции $f(x)$ для каждого из значений $x \in D$.

Частное значение функции $y = f(x)$ при некотором значении аргумента x_0 записывается в виде $f(x_0)$ или $y\big|_{x=x_0}$.

При аналитическом задании функции область определения D есть множество значений аргумента x, при которых данная формула имеет смысл.

Пример. Найти область определения D и множество значений E функции $y = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

Решение. Областью определения функции является множество

$$D(f) = \left\{x \middle| \, 4 - x^2 > 0\right\} = \left\{x \middle| \, |x| < 2\right\} = (-2;2),$$

а множеством значений

$$E(f) = \left\{y \middle| y \geq \frac{1}{2}\right\} = \left[\frac{1}{2};+\infty\right).$$

Аналитически функция может быть задана не одной, а несколькими формулами. Такие функции называют ***составными***.

Примеры. **1.** Единичная функция Хевисайда (рис.6):

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ 1 \text{ при } x \geq 0. \end{cases}$$

2. Функция сигнум, или функция знака (рис.7):

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 \text{ при } x < 0, \\ 0 \text{ при } x = 0 \\ 1 \text{ при } x > 0. \end{cases}$$

3. Функция Дирихле:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{если } x - \text{рациональное число}, \\ 0, \text{если } x - \text{иррациональное число}. \end{cases}$$

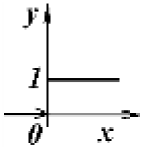

Рис.6. График функции Хевисайда

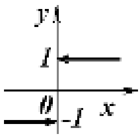

Рис.7. График функции $y = \operatorname{sgn} x$

Аналитически функция $y = f(x)$, $x \in [a;b]$ может быть ***неявно*** задана уравнением $F(x;y) = 0$, если $\forall x \in [a;b]$ $F(x; f(x)) = 0$. В некоторых случаях, разрешив уравнение $F(x;y) = 0$ относительно y, удается получить явное задание функции $y = f(x)$.

Пример. Уравнение окружности $x^2 + y^2 = R^2$ с центром в начале координат и радиусом R неявно задает две числовые функции:

$$y_1 = \sqrt{R^2 - x^2}\,,\ D(y_1) = [-R;R] \text{ и}$$

$$y_2 = \sqrt{R^2 - x^2}\,,\ D(y_2) = [-R;R].$$

Аналитически функция $y = f(x)$ может быть задана в ***параметрическом*** виде. Пусть $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ – две функции одной независимой переменной $t \in T$. Если $x = \varphi(t)$ монотонна на T, то существует обратная к ней функция $t = \varphi^{-1}(x)$. Поэтому функцию $y = \psi(t)$, $t = \varphi^{-1}(x)$ можно рассматривать как сложную функцию, переводящую элемент x в элемент y посредством промежуточной переменной t:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \varphi^{-1}(x), \\ y = \psi(t), \end{cases} \Rightarrow y = \psi(\varphi^{-1}(x)) = F(x).$$

В этом случае говорят, что сложная функция $y = \psi(\varphi^{-1}(x)) = F(x)$ задана ***параметрическими уравнениями*** и пишут:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

где $t \in T$.

Переменная t называется ***параметром***. Параметр t может иметь различный смысл, определяемый характером функциональной зависимости.

Всякую функцию, заданную явно $y = f(x)$, можно задать параметрически:

$$y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = t, \\ y = f(t), \end{cases}$$

где $t \in T$.

Параметрическое задание функций иногда имеет преимущество перед другими формами их задания. В некоторых случаях непосредственная связь между y и x может быть весьма сложной, в то время как функции $x(t)$ и $y(t)$ определяющие функциональную зависимость y от x через параметр t, оказываются простыми.

Пример. Уравнение окружности $x^2 + y^2 = R^2$ с центром в начале координат и радиусом R в параметрическом виде записывается как

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t. \end{cases}$$

Здесь параметр t – угол между положительным направлением оси Ox и радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$ текущей точки $M(x; y)$ окружности, отсчитываемый против хода часовой стрелки, $0 \le t < 2\pi$. Очевидно, что для любой точки $M(x; y)$

$$x^2 + y^2 = R^2(\cos^2 t + \sin^2 t) \Rightarrow x^2 + y^2 = R^2.$$

Табличный способ задания функции осуществляется табличным перечислением n значений аргумента $x_1; x_2; ...; x_n$ и соответствующих им значений функции $y_1; y_2; ...; y_n$.

Известны таблицы значений логарифмической функции, тригонометрических функций и др. Этот способ задания функции широко применяется на практике в тех случаях, когда значения функции имеют определенный физический смысл и находятся в результате эксперимента. К достоинствам табличного способа относят то, что для значений аргумента $x_1; x_2; ...; x_n$ из таблицы сразу можно получить значения функции $y_1; y_2; ...; y_n$ (т.е. не нужны дополнительные вычисления). Его недостатками являются: отсутствие наглядности (трудно судить о характере изменения функции); невозможность определения промежуточных значений функции по таблице; затруднения в непосредственном применении математического аппарата.

Если функция задана аналитически, то для нее всегда можно построить таблицу (т.е. табулировать функцию). Если функция задана таблично, то в общем случае найти аналитическое выражение функции по ее табличным данным невозможно. Однако с помощью интерполирования функции можно найти формулу (и не одну) для таблично заданной функции, которая будет давать точные табличные значения функции и ее приближенные значения, не входящие в таблицу. Такие формулы называют *интерполяционными*. Для составления таблиц функций в настоящее время используют специальные ППП ЭВМ.

Графический способ задания функции состоит в представлении функции $y=f(x)$ графиком в некоторой системе координат.

Определение 9. ***Графиком Г функции*** $y=f(x)$ называется множество точек $M(x;y)$ плоскости $\mathbf{R}^2$**,** координаты которых связаны данной функциональной зависимостью, т.е.

$$\Gamma=\left\{M(x;y)\in\mathbf{R}^2\,\middle|\;y=f(x)\right\}.$$

Чаще всего график функции есть некоторая линия. Если аргумент x принимает отдельные значения, например $x\in\mathbf{N}$, то графиком функции является множество изолированных точек.

Пример. Графики функций $y=n$, $y=n!$, $n\in\mathbf{N}$, представляют собой множества изолированных точек плоскости $\mathbf{R}^2$.

Не всякая линия плоскости $\mathbf{R}^2$ является графиком числовой функции $y=f(x)$: линия не является графиком функции, если одному значению $x_1\in D$ соответствуют несколько значений переменной y.

В технике и медицине применяются различные приборы-самописцы, регистрирующие ход и изменения некоторых величин с течением времени. Они графически задают эти величины как функции времени. Например, в медицине электрокардиограф вычерчивает электрокардиограмму – кривую изменения электрических импульсов сердечной мышцы. В метеорологии вычерчиваются кривые, изображающие зависимость между давлением и временем (барограммы) и т.д.

Графический способ задания функции нагляден, но не удобен для применения математического аппарата.

Программный способ задания функции, при котором функция задается с помощью указания программы на одном из машинных языков. Этот способ задания функции используется при решении различных задач на ЭВМ. Разработаны стандартные программы, задающие различные функции.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение функции, ее области определения, множества значений.

2. Перечислите способы задания функций.

3. Какими свойствами обладают функции?

4. Дайте определение сложной функции.

5. Дайте определение обратной функции. Как для взаимно однозначной функции получить обратную ей? Как располагаются графики взаимно-обратных функций?

Лекция 5. КЛАССИФИКАЦИЯ ФУНКЦИЙ

1. Основные элементарные функции.
2. Классификация функций.
3. Основные функции, заданные параметрическими уравнениям.
4. Основные линии, заданные в полярной системе координат.

1 Основные элементарные функции. Из курса школьной математики известны следующие элементарные функции.

Линейная функция $y = ax + b$, $a, b \in \mathbf{R}$. Область определения этой функции $D(f) = \mathbf{R}$, а множество значений

$$E(f) = \begin{cases} \mathbf{R} & \forall a \neq 0, \\ \{b\} & \text{при } a = 0. \end{cases}$$

Линейная функция возрастает при $a > 0$, убывает при $a < 0$.

График функции – прямая линия с угловым коэффициентом $k = a = \operatorname{tg}\alpha$ отсекающая на оси Oy отрезок, равный b (рис.1).

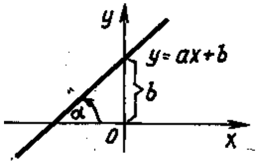

Рис.1. График линейной функции

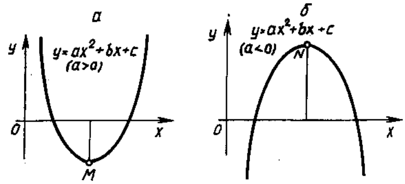

Рис.2.График квадратичной функции

Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$. При $a > 0$ известно, что $D(f) = \mathbf{R}$, $E(f) = \left(\dfrac{4ac - b^2}{4a}; \infty\right)$. При $a < 0$ имеем $D(f) = \mathbf{R}$, $E(f) = \left(-\infty; \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$. Графики для этих случаев представлены на рисунке 2.

Степенная функция $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Пусть $\alpha = 2n$, $n \in \mathbf{N}$. Тогда $y = x^{2n}$ и $D(f) = \mathbf{R}$, $E(f) = [0; \infty)$ (рис.3).

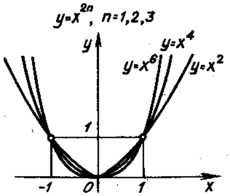

Рис.3. Графики функций $y = x^{2n}, n \in \mathbf{N}$

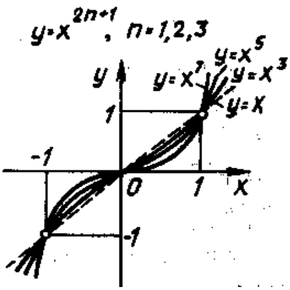

Рис.4. Графики функций $y = x^{2n+1}, n \in \mathbf{N}$

Пусть $\alpha = 2n + 1$, $n \in \mathbf{N}$. Тогда $y = x^{2n+1}$ и $D(f) = \mathbf{R}$, $E(f) = \mathbf{R}$ (рис.4).

Пусть $\alpha = -2n$, $n \in \mathbf{N}$. Тогда $y = \dfrac{1}{x^{2n}}$ и $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $E(f) = (0; +\infty)$ (рис.5).

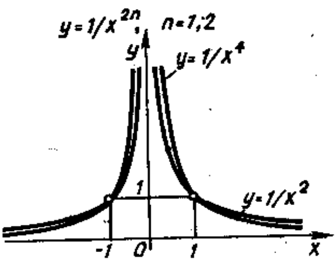

Рис.5. Графики функций $y = \dfrac{1}{x^{2n}}, n \in \mathbf{N}$

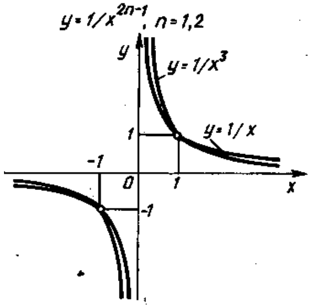

Рис.6. Графики функций $y = \dfrac{1}{x^{2n-1}}, n \in \mathbf{N}$

Пусть $\alpha = -2n + 1$, $n \in \mathbf{N}$. Тогда $y = \dfrac{1}{x^{2n-1}}$ и $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $E(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ (рис.6).

Пусть $\alpha \notin \mathbf{Z}$. Тогда $y = x^{\alpha}$ и $D(f) = (0; +\infty)$, $E(f) = (0; +\infty)$. При некоторых α $D(f)$ и $E(f)$ могут быть шире.

Показательная функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Область определения этой функции $D(f) = \mathbf{R}$, а множество значений

$E(f)=(0;+\infty)$ (рис.7,а). Если $a=e$, $e\approx 2{,}71828\,...$, то функция $y=e^x$ называется ***экспонентой***: $y=e^x=\exp(x)$ (рис.7,б).

а) б)

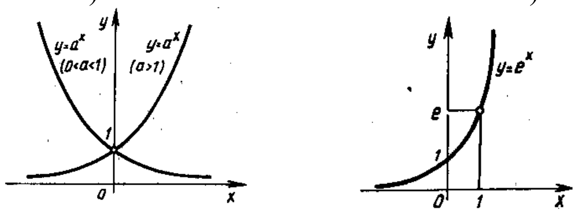

Рис.7. Графики показательной функции

Логарифмическая функция $y=\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$. Эта функция обратная показательной. Область ее определения $D(f)=(0;\infty)$, множество значений $E(f)=\mathbf{R}$ (рис.8,а). Если $a=e$, то $y=\ln x$ называется функцией ***натурального логарифма*** (рис.8.б).

а) б)

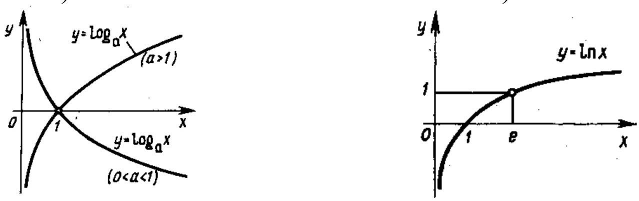

Рис.8. Графики логарифмической функции

Тригонометрические функции $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\mathrm{tg}\,x$, $y=\mathrm{ctg}\,x$. Функция $y=\sin x$; $D(f)=\mathbf{R}$, $E(f)=[-1;1]$. График – синусоида (рис.9). Функция $y=\cos x$; $D(f)=\mathbf{R}$, $E(f)=[-1;1]$. График – косинусоида (рис.9). Функция $y=\mathrm{tg}\,x$; $D(f)=\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2+\pi k}\middle|\, k\in\mathbf{Z}\right\}$, $E(f)=\mathbf{R}$. График – тангенсоида (рис.10). Функция $y=\mathrm{ctg}\,x$; $D(f)=\mathbf{R}\setminus\{\pi k|\ k\in\mathbf{Z}\}$, $E(f)=\mathbf{R}$. График – котангенсоида (рис.10). К тригонометрическим функциям относятся функции: секанс $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$ и косеканс $y=\mathrm{cosec}\,x=\dfrac{1}{\sin x}$.

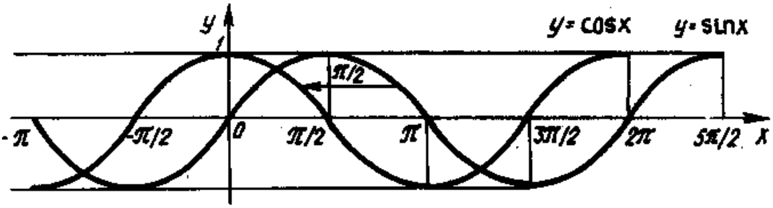

Рис.9. Графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$

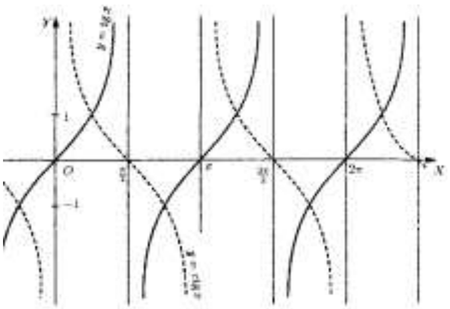

Рис.10. Графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$

Обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$. Они определяются как функции, обратные соответствующим тригонометрическим функциям.

Функция $y = \arcsin x$: $y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$; $D(f) = [-1;1]$, $E(f) = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ (рис.11).

Функция $y = \arccos x$: $y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$; $D(f) = [-1;1]$, $E(f) = [0;\pi]$ (рис.12).

Функция $y = \operatorname{arctg} x$: $y = \operatorname{arctg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{tg} y$, $D(f) = \mathbf{R}$, $E(f) = \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ (рис.13).

Функция $y = \operatorname{arcctg} x$: $y = \operatorname{arcctg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{ctg} y$, $D(f) = \mathbf{R}$, $E(f) = (0;\pi)$ (рис.14).

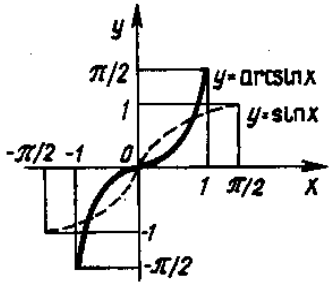

Рис.11. Графики функций
$y = \sin x$ и $y = \arcsin x$

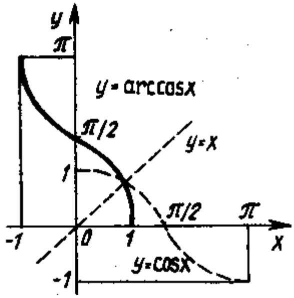

Рис.12. Графики функций
$y = \cos x$ и $y = \arccos x$

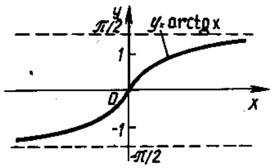

Рис.13. График функции
$y = \operatorname{arctg} x$

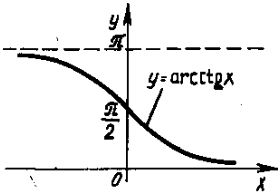

Рис.14. График функции
$y = \operatorname{arcctg} x$

Гиперболические функции $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{ch} x$, $y = \operatorname{th} x$, $y = \operatorname{cth} x$.

Функция ***синус гиперболический*** $y = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$; $D(f) = \mathbf{R}$, $E(f) = \mathbf{R}$ (рис.15).

Функция ***косинус гиперболический*** $y = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$; $D(f) = \mathbf{R}$, $E(f) = [1;+\infty)$ (рис.15).

Функция ***тангенс гиперболический*** $y = \operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$. Тогда $\operatorname{th} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; $D(f) = \mathbf{R}$, $E(f) = (-1;1)$ (рис.16).

Функция ***котангенс гиперболический*** $y = \operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$. Тогда (рис.16)

$$\operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}};$$

$$D(f)=\begin{cases}(0;+\infty)\text{ при } x>0,\\(-\infty;0)\text{при } x>0,\end{cases}\quad E(f)=\begin{cases}(1;+\infty)\text{ при } x>0,\\(-\infty;1)\text{при } x>0.\end{cases}$$

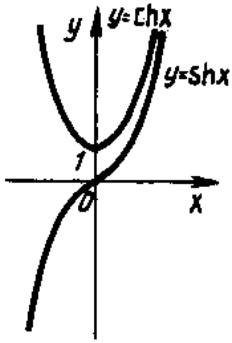

Рис.15. Графики функций
$y=\operatorname{sh}x$, $y=\operatorname{ch}x$

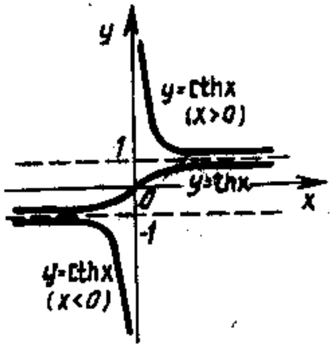

Рис.16. Графики функций
$y=\operatorname{th}x$, $y=\operatorname{cth}x$

2. Классификация функций. Рассмотренные функции: степенные, показательные, логарифмические, тригонометрические, обратные тригонометрические являются ***основными элементарными функциями.*** Также все функции, полученные с помощью конечного числа арифметических действий над основными элементарными функциями, а также их композиций, составляют класс элементарных функций.

Пример. Элементарными функциями являются: $f(x)=|x|$, $f(x)=\log_a^3\left(\arcsin 3^{x-1}\right)$, $f(x)=\dfrac{2+x^2}{x^3-\sin x}$, $f(x)=10^{1-\sin^4\frac{1}{x}}$ и т.д.

Имеет место следующая классификация элементарных функций.

1. Рациональные функции. Функция вида

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_n$$

где $n\in\mathbf{N}\cup\{0\}$, $a_0,a_1,a_2,...,a_n\in\mathbf{R}$ называется ***рациональной функцией*** или ***многочленом степени*** n.

2. Дробно-рациональные функции. Функция, представляющая собой отношение двух целых рациональных функций:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+...+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+...+b_n},$$

называется ***дробно-рациональной***.

3. Иррациональные функции. Функция, полученная с помощью конечного числа суперпозиций и четырех арифметических действий над степенными функциями как с целыми, так и с дробными показателями, и не являющаяся рациональной, называется ***иррациональной***.

Пример. Функции $y=\sqrt{x}$, $y=\dfrac{\sqrt[3]{x+2}}{x^2+1}$, $y=\sqrt{\dfrac{x^2+5}{3x^3-8}}$, $y=\sqrt{1+x}-\sqrt{2-x^2}$ являются иррациональными.

Рациональные, дробно-рациональные и иррациональные функции образуют класс **алгебраических функций.**

4. Трансцендентные функции. Всякая функция, не являющаяся алгебраической, называется ***трансцендентной***. К трансцендентным функциям относятся тригонометрические, обратные тригонометрические, показательные, логарифмические, гиперболические и обратные гиперболические функции.

Пример. Функции $y=\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$, $y=\operatorname{sh}(x-2)$, $y=\ln\left(x^3+5\right)$ являются трансцендентными.

3 Основные функции, заданные параметрическими уравнениями. Параметрическое задание функций иногда имеет преимущество перед другими формами их задания. В некоторых случаях непосредственная связь между y и x может быть весьма сложной, в то время как функции $x(t)$ и $y(t)$ определяющие функциональную зависимость y от x через параметр t, оказываются простыми.

Множество точек $M(x;y)$ числовой плоскости $\mathbf{R}^2$, координаты которых удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}$$

где $t\in T$, параметрически задает некоторую линию $\Gamma\in\mathbf{R}^2$.

Наиболее часто употребляемые в математическом анализе линии являются следующие.

1. Окружность $x^2+y^2=R^2$.

Параметрические уравнения окружности при $0\le t<2\pi$:

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t. \end{cases}$$

2. Эллипс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Параметрические уравнения эллипса имеют вид ($0 \le t < 2\pi$) (рис.17):

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$$

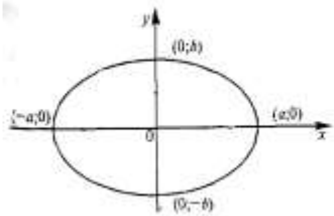

Рис.17. Эллипс

3. Гипербола $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Параметрические уравнения гиперболы имеют вид ($t \in \mathbf{R}$) (рис.18):

$$\begin{cases} x = a\,\mathrm{ch}\,t, \\ y = b\,\mathrm{sh}\,t. \end{cases}$$

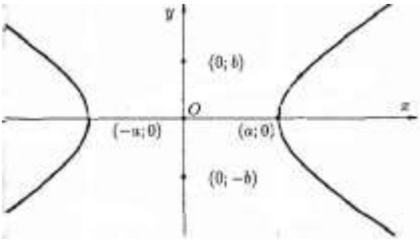

Рис.18. Гипербола

4. *Декартов лист* – кривая третьего порядка, уравнение которой в декартовой системе координат имеет вид

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0\ ,$$

в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}, \end{cases}$$

где $t = \mathrm{tg}(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{Ox}})$. Эта кривая симметрична относительно биссектрисы $y = x$.

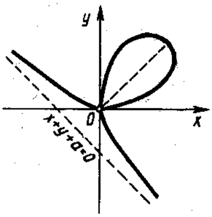

Рис. 19.Декартов лист

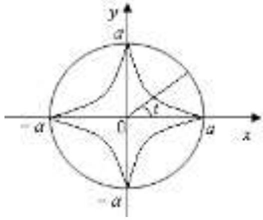

Рис.20. Астроида

5. *Астроида* – замкнутая линия, являющаяся траекторией точки, лежащей на окружности круга радиусом r, который катится по внутренней стороне неподвижного круга радиусом a. Ее уравнение в *декартовой системе* имеет вид:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

в *параметрическом* виде

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases}$$

где $0 \le t < 2\pi$.

6. *Циклоида* – это кривая, описываемая точкой окружности, катящейся без скольжения по прямой линии. Циклоида состоит из конгруэнтных дуг, каждая из которых соответствует полному обороту катящегося круга (рис.21).

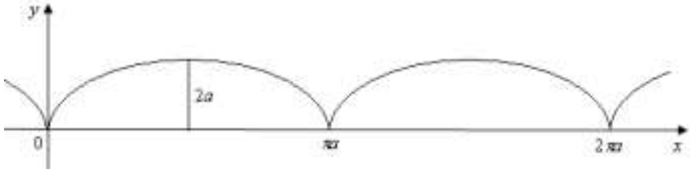

Рис.21. Циклоида

Параметрические уравнения циклоиды есть

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$$

где $t \in \mathrm{R}$.

4. Основные линии, заданные в полярной системе координат. Кроме декартовой системы координат Oxy , на плоскости $\mathbf{R}^2$ иногда используется полярная система координат.

Определение 1. Система координат, задаваемая точкой O , называемой ***полюсом***, лучом $O\,u$, называемым ***полярной осью***, и выбранной на полярной оси ***единицей масштаба***, называется ***полярной системой координат***.

Определение 2. ***Полярными координатами*** точки $M \in \mathbf{R}^2$ (не совпадающей с полюсом), называется полярный радиус $r = \left|\overrightarrow{OM}\right|$ точки M и полярный угол φ, т.е. угол, на который надо повернуть ось Ox до совпадения ее с вектором $\overrightarrow{OM}$ (рис.22), т.е. $M(r;\varphi)$.

Если поворот совершается против хода часовой стрелки, то $\varphi(M) > 0$, в противном случае $\varphi(M) < 0$. Полярный угол φ принимает бесконечное множество значений, отличающихся друг от друга на $2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Значение полярного угла $0 \le \varphi < 2\pi$ называется ***главным***. Иногда в качестве главного значения принимается $-\pi < \varphi \le \pi$.

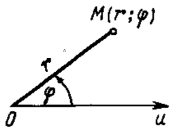

Рис.22. Полярные координаты

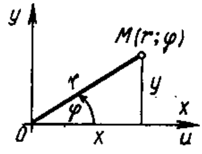

Рис.23. Связь полярных и декартовых координат

Положение любой точки M на плоскости однозначно определяется координатами r и φ, $0 \le r < \infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$. Если точка M совпадает с полюсом O , то ее радиус-вектор равен нулю ($r = 0$), а полярный угол φ можно выбирать любым.

Связь декартовых и полярных координат устанавливается из геометрических соображений (рис.23).

Зная полярные координаты r и φ точки M, ее декартовы координаты x и y находятся по формулам:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Зная декартовы координаты x и y точки M, ее полярные координаты находятся по формулам:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

Если $0 \le \varphi < 2\pi$, то найденному значению $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$ соответствуют два значения φ. Из этих двух значений угол φ выбирается по знакам $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$.

Зная связь между декартовыми и полярными координатами точки, уравнение линии Γ на плоскости можно записать в виде $F(r,\varphi)=0$ или $r = r(\varphi)$.

Область определения функции в полярной системе координат обозначается $D(r)$, множество значений – $E(r)$.

Часто используются следующие линии, заданные в полярной системе координат

1. Окружность. Окружность с центром в начале координат и радиусом, равным R в полярных координатах имеет уравнение (рис.24,а): $r = R$.

Окружность радиусом R с центром, смещенным по оси абсцисс вправо на a единиц описывается уравнением (рис.24,б):

$$r = 2a\cos\varphi.$$

Окружность радиусом R с центром, смещенным по оси ординат вверх на a единиц описывается уравнением (рис.24,в):

$$r = 2a\sin\varphi.$$

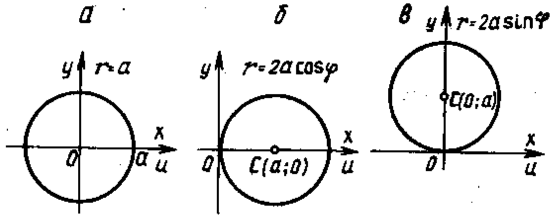

Рис.24. Полярное задание окружности

2. Розы. ***Розами*** называется семейство кривых, уравнение которых в полярных координатах записывается в виде:

$$r = a\sin k\varphi \text{ или } r = a\cos k\varphi,$$

где a, k – положительные числа. При любых a, k, φ и $r \le a$ все кривые располагаются внутри круга радиусом a. Вследствие периодичности функций $\sin k\varphi$ и $\cos k\varphi$ розы состоят из конгруэнтных лепестков, симметричных относительно наибольших радиусов, каждый из которых равен a.

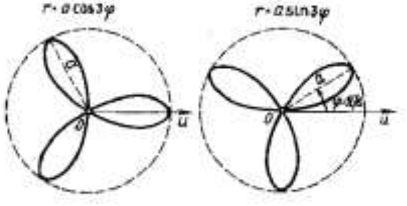

Рис.25. Розы с нечетным числом лепестков

Количество лепестков розы зависит от значения k. Если k нечетно число, то роза состоит из k лепестков (рис.25). Если k четное число, то – из $2k$ лепестков (рис.26).

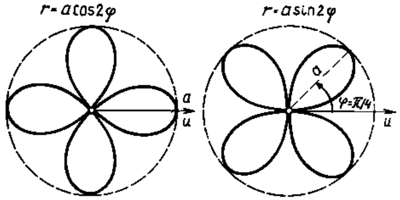

Рис.26. Розы с четным числом лепестков

3. Спирали. Спираль Архимеда (рис.27) определяется как траектория точки, участвующей одновременно в двух равномерных движениях, одно из которых совершается вдоль прямой, а другое – по окружности.

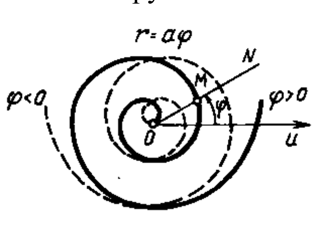

Рис.27. Спираль Архимеда

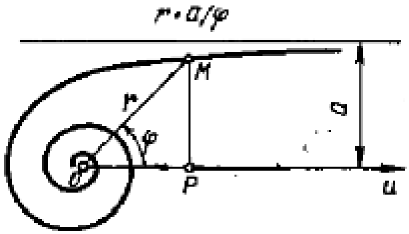

Рис.28. Гиперболическая спираль

Полярное уравнение спирали Архимеда имеет вид:

$$r = a\varphi,$$

где a – коэффициент пропорциональности, $D(r) = \mathbf{R}$, $E(r) = \mathbf{R}$.

Гиперболическая спираль (рис.28) – это кривая, полярное уравнение которой имеет вид:

$$r = \frac{a}{\varphi}, \ a > 0,$$

где $D(r) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $E(r) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Прямая, параллельная полярной оси и удаленная от нее на расстояние a, является асимптотой гиперболической спирали.

Логарифмическая спираль (рис.29) – это кривая, полярное уравнение которой имеет вид:

$$r = a^{\varphi}, \ a > 0, a \neq 1,$$

где $D(r) = \mathbf{R}$, $E(r) = (0;\infty)$. Она пересекает все свои радиусы-векторы под одним и тем же углом. Это свойство кривой используют в технике.

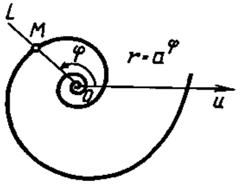

Рис.29. Логарифмическая спираль

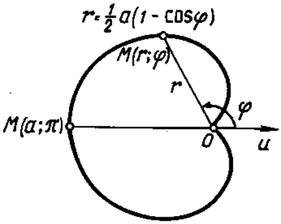

Рис.30. Кардиоида

Синусоидальными спиралями называют семейство кривых, уравнение которых в полярных координатах имеет вид

$$r^m = a^m \sin m\varphi \quad \text{или} \quad r^m = a^m \cos m\varphi.$$

Частным случаем при $m = \frac{1}{2}$ является *кардиоида* (рис.30), уравнение которой $r = \frac{a}{2}(1 - \cos\varphi)$.

При $m = 2$ уравнение $r^2 = a^2 \sin 2\varphi$ или $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ определяет кривую, которая называется *лемнискатой Бернулли* (рис.31).

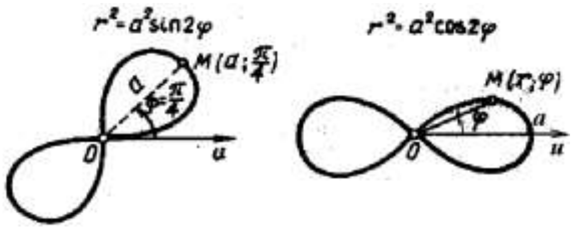

Рис.31. Лемниската Бернулли

Вопросы для самоконтроля

1. Перечислите основные числовые функции.

2. Перечислите основные классы функций?

3. Какие уравнения линии называются параметрическими? Перечислите основные функции, заданные параметрическими уравнениям.

4. Дайте определение полярной системы координат. Какие формулы связывают полярную и декартову системы координат.

5. Перечислите основные линии, заданные в полярной системе координат.

Лекция 6. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

1. Определение предела функции по Гейне и по Коши.
2. Односторонние пределы функции.
3. Бесконечные пределы.
4. Критерий Коши существования предела.

1. Определение предела функции по Гейне и по Коши. Пусть функция $f(x)$ определена в проколотой окрестности точки x_0 т.е. на множестве

$$\overset{\circ}{U}(\delta; x_0) = \left\{ x \,\middle|\, 0 < |x - x_0| < \delta \right\}.$$

В точке x_0 значение $f(x_0)$ может быть не определено.

Определение 1 (по Гейне). Число $A \in \mathbf{R}$ называется ***пределом*** функции $y = f(x)$ в точке x_0 (или при $x \to x_0$), если для любой последовательности точек $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. $x_n \in \overset{\circ}{U}(\delta; x_0)$, сходящейся к x_0, последовательность соответствующих значений функции $\left(f(x_n)\right)_{n=1}^{\infty}$ сходится к A.

Символическая запись:

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall (x_n): \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = A.$$

Пример. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{1\}$. Используя определение предела функции по Гейне, доказать, что $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

Решение. Функция $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ не определена в точке $x_0 = 1$, но определена для любой окрестности $\overset{\circ}{U}(\delta; 1)$ (рис.1). Пусть $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – произвольная последовательность с общим членом $x_n \neq 1$, такая, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 1$.

Образуем последовательность $f(x_n) = \dfrac{x_n^2 - 1}{x_n - 1}$. Так как $x_n \neq 1$, то $f(x_n) = x_n + 1$.

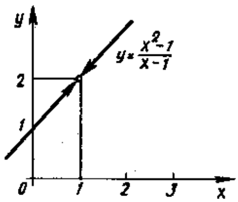

Рис.1.График функции $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+1)=2$.

Отсюда $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.

О п р е д е л е н и е 2 (по Коши). Число A называется ***пределом*** функции $y=f(x)$ в точке x_0 (или при $x\to x_0$), если для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое число $\delta(\varepsilon)>0$, что при всех x, удовлетворяющих условию $0<|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Символическая запись:

$$A=\lim_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\forall x\ \ 0<|x-x_0|<\delta \quad |f(x)-A|<\varepsilon$$

Учитывая, что

$$U(\varepsilon;A)=\{y|\ |f(x)-A|<\varepsilon\},\ \overset{\circ}{U}(\delta;x_0)=\{x|\ 0<|x-x_0|<\delta\},$$

определение на языке «$\varepsilon-\delta$» можно записать в виде:

$$A=\lim_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\forall x\in\overset{\circ}{U}(\delta;x_0) \quad f(x)\in U(\varepsilon;A).$$

Геометрическая интерпретация определения конечного предела функции по Коши дана на рисунке 2. Из рисунка видно, что $\overset{\circ}{U}(\delta;x_0)$ отображается функцией в $U(\varepsilon;A)$, т.е. любому x из проколотой δ-окрестности точки x_0 соответствует значение $f(x)$ попадающее в ε-окрестность точки A.

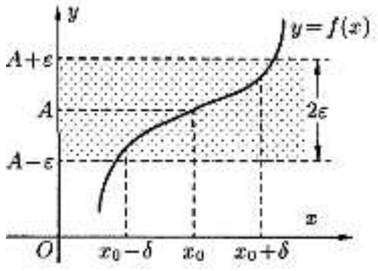

Рис.2. Геометрический смысл предела $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

Теорема 1. *Определения предела функции в точке* x_0 *по Гейне и по Коши эквивалентны, т.е. число* A *– предел функции в точке* x_0 *в смысле определения по Гейне тогда и только тогда, когда* A *является пределом функции в смысле определения по Коши.*

► *Случай 1.* Пусть $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ в смысле определения по Гейне. Предположим противное. Пусть A не является пределом функции по определению 2. Это значит, что если не для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, чтобы из неравенства $0 < |x - x_0| < \delta$ выполнялось неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Поэтому $\exists\, \varepsilon_0 > 0$ такое, что $\forall\, \delta > 0$ существует $x \neq x_0$, удовлетворяющее неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, что $|f(x) - A| > \varepsilon_0$.

Будем выбирать в качестве δ последовательно числа

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \dots .$$

Тогда для $\delta = 1$ существует x_1, $x_1 \neq x_0$ такое, из неравенства $0 < |x_1 - x_0| < 1$ следует $|f(x_1) - A| > \varepsilon_0$, для $\delta = \frac{1}{2}$ существует x_2, $x_2 \neq x_0$ такое, из неравенства $0 < |x_2 - x_0| < \frac{1}{2}$ следует $|f(x_2) - A| > \varepsilon_0$, и так далее.

В результате получим последовательность точек $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $x_n \neq x_0$, сходящихся к x_0 при $n \to \infty$. Согласно определению по Гейне, соответствующая последовательность $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ сходится к A, т.е. $\left|f\left(x_n\right)-A\right|<\varepsilon$. Но построению последовательности $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ имеем $\left|f\left(x_n\right)-A\right|>\varepsilon_0$. Получили противоречие. Значит, справедливо определение предела функции в смысле Коши.

Случай 2. Пусть $A=\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ в смысле определения по Коши.

Возьмем последовательность $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in \overset{\circ}{U}\left(\delta; x_0\right)$, сходящуюся к x_0. Тогда по определении 2 для данного $\delta>0$, соответствующего $\varepsilon>0$, найдется такое N, что при $n>N$ выполняется неравенство $0<\left|x_n-x_0\right|<\delta$. Значит, выполняется и неравенство $\left|f\left(x_n\right)-A\right|<\varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon>0$, заключаем, что $\left(f\left(x_n\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ сходится к A при $n \to \infty$, т.е. справедливо определение предела в смысле Гейне. ◄

Определение 3 (по Гейне). Число A называется ***пределом*** функции $y=f(x)$ при $x \to \infty$, если для любой бесконечно большой последовательности $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ значений аргумента, соответствующая последовательность $\left(f\left(x_n\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ значений функции сходится к A:

$$\lim_{x \to \infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}: \lim_{n \to \infty} x_n=\infty \qquad \lim_{n \to \infty} f\left(x_n\right)=A.$$

Определение 4 (по Гейне). Число A называется ***пределом*** функции $y=f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), если для любой бесконечно большой последовательности $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ значений аргумента, элементы которой положительны (отрицательны), соответствующая последовательность $\left(f\left(x_n\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ значений функции сходится к A:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty},\ x_n>0,\ x_n \in \overset{\circ}{U}\left(\delta; x_0\right): \lim_{n \to \infty} x_n=+\infty$$
$$\lim_{n \to \infty} f\left(x_n\right)=A.$$

$$(\lim_{x \to -\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty},\ x_n<0,\ x_n \in \overset{\circ}{U}\left(\delta; x_0\right): \lim_{n \to \infty} x_n=-\infty$$
$$\lim_{n \to \infty} f\left(x_n\right)=A).$$

Пример. Доказать, что функция $f(x)=\dfrac{1}{x}$ имеет предел при

$x \to \pm\infty$, равный нулю.

Решение. Пусть $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ любая бесконечная последовательность значений аргумента. Тогда соответствующая последовательность значений функции $\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}, \ldots\right)$ является бесконечно малой, т.е. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$.

Аналогично можно дать равносильные определения конечного предела функции при $x \to \infty$, $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$ на языке «$\varepsilon - \delta$». Например, определение конечного предела функции при $x \to +\infty$.

Определение 5 (по Коши). Число A называется ***пределом*** функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует положительное число K, такое, что неравенство $|f(x) - A| \leq 0$ выполняется для всех x, при которых $x > K$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists K > 0: \ \forall x > K \ \Rightarrow \ |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Множество

$$\{x \mid x > K\} = U(K; \infty)$$

называется ***окрестностью бесконечно удаленной точки***.

Геометрически: график функции $y = f(x)$ находиться в полосе, ограниченной прямыми $y = A - \varepsilon$, $y = A + \varepsilon$ при любом значении $x > K$ (рис.3).

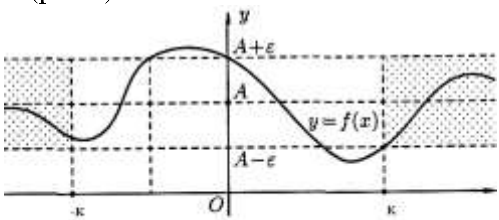

Рис.3. Геометрический смысл предела $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$

2. Односторонние пределы функции. При рассмотрении конечного предела функции $f(x)$ при $x \to x_0$ предполагалось, что точка x, приближаясь к x_0, могла оставаться как слева, так и справа от нее. Иногда приходится рассматривать предел функции $f(x)$ при условии, что точка x, приближаясь к точке x_0, остается либо правее, либо левее ее.

О п р е д е л е н и е 6. ***Левой*** δ***-окрестностью*** точки x_0 называется множество всех x, удовлетворяющих неравенству $-\delta < x - x_0 \le 0$ (рис.3):

$$U(\delta; x_0 - 0) = \{x \mid -\delta < x - x_0 \le 0\}.$$

Правой δ***-окрестностью*** точки x_0 называется множество всех x, удовлетворяющих неравенству $0 \le x - x_0 < \delta$ (рис.4):

$$U(\delta; x_0 + 0) = \{x \mid 0 \le x - x_0 < \delta\}.$$

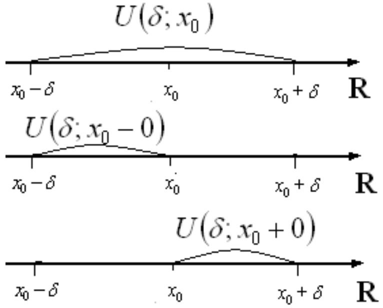

Рис. 4. Окрестности точки x_0

О п р е д е л е н и е 7. Число A называется ***левым пределом*** функции $y = f(x)$ в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что $\forall x \in \overset{\circ}{U}(\delta; x_0 - 0)$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Символическая запись:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A \iff$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \ \forall x \in \overset{\circ}{U}(\delta; x_0 - 0) \quad |f(x) - A| < \varepsilon .$$

О п р е д е л е н и е 8. Число A называется ***правым пределом*** функции $y = f(x)$ в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, такое, что $\forall x\in\overset{\circ}{U}(\delta;x_0+0)$ выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Символическая запись:

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=A \Leftrightarrow$$

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0:\ \forall x\in\overset{\circ}{U}(\delta;x_0+0)\quad |f(x)-A|<\varepsilon .$$

Теорема 2. *Функция* $f(x)$ *имеет в точке* x_0 *предел тогда и только тогда, когда в этой точке существуют конечные правый и левый пределы и они равны между собой*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x).$$

► *Необходимость*. Поскольку существуют односторонние пределы $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A$, то по определению имеем

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon>0\exists\delta_1>0:\ \forall x\ -\delta_1<x-x_0\le 0\quad |f(x)-A|<\varepsilon ,$$

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon>0\exists\delta_2>0:\ \forall x\ 0\le x-x_0<\delta_2\ \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon .$$

Возьмем $\delta=\min\{\delta_1;\delta_2\}$. Тогда для любых x удовлетворяющих неравенству $-\delta\le x-x_0<\delta$ выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Достаточность. В силу существования предела функции $f(x)$ в точке x_0 по определению имеем

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon>0\exists\delta>0:\forall x\ 0<|x-x_0|<\delta\quad |f(x)-A|<\varepsilon .$$

Из неравенства $-\delta\le x-x_0<\delta$ получим:

1) $\forall x\ \ -\delta<x-x_0\le 0$ выполняется $|f(x)-A|<\varepsilon$, значит су-

ществует $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A$,

2) $\forall x \;\; 0\le x-x_0<\delta$ выполняется $|f(x)-A|<\varepsilon$, значит существует $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A$. ◄

3. Бесконечные пределы функции. Пусть функция $y=f(x)$ при $x\to x_0$ по абсолютной величине неограниченно возрастает.

Определение 9 (по Коши). Предел функции $y=f(x)$ при $x\to x_0$ называется ***бесконечным***, если для любого положительного числа K существует число $\delta>0$, такое, что для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $0<|x-x_0|<\delta$, будет выполняться неравенство $|f(x)|>K$. Если $f(x)$ стремится к бесконечности при $x\to x_0$, то она называется ***бесконечно большой*** функцией:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty \;\Leftrightarrow\; \forall K>0 \;\; \exists\delta>0:\; \forall x \;\; 0<|x-x_0|<\delta \;\; |f(x)|>K.$$

Если $f(x)$ стремится к бесконечности при $x\to x_0$ и при этом принимает только положительные или только отрицательные значения, то соответственно: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$.

На рисунке 5 дана геометрическая интерпретация бесконечных пределов $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ функции $f(x)$ при $x\to x_0$: график функции $f(x)$ расположен в полуплоскости $y>K$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ (Рис.5,*а*) и в полуплоскости $y<-K$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ (рис.5,*б*).

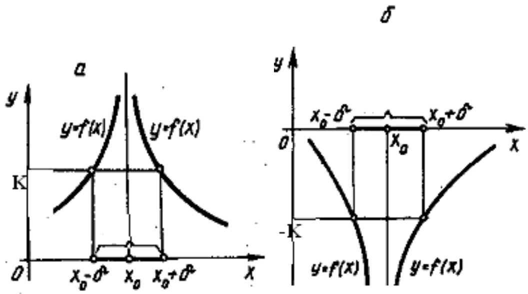

Рис.5. Геометрический смысл бесконечного предела

Аналогично вводится определение бесконечного предела функции по Гейне.

Определение 10.(по Гейне) Функция $f(x)$ имеет ***бесконечный предел*** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, если для любой сходящейся к x_0 последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ значений аргумента x соответствующая последовательность $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ значений функции является бесконечно большой.

Существуют функции, обладающие следующим свойством: при неограниченном увеличении $|x|$ значения $|f(x)|$ также неограниченно возрастают.

Определение 11. Предел функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ (или $x \to -\infty$) называется ***бесконечным***, если для любого сколь угодно большого числа $K \in \mathbf{R}$ найдется такое число $N > 0$, что неравенство $|f(x)| > K$ выполняется для любого x, для которого $|x| > N$:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \iff \forall K > 0 \;\; \exists N > 0: \; \forall |x| > N \qquad |f(x)| > K .$$

Стремление функции к бесконечности при $x \to \infty$ означает, что график функции при $\forall x$ ($|x| > N$) выходит за пределы полосы, ограниченной прямыми $y = K$ и $y = -K$.

4. Критерий Коши существования предела функции.

Теорема 3 (критерий Коши существования предела функции). *Для того чтобы функция $f(x)$ имела в точке $x = x_0$ конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовала такая окрестность $U(\delta; x_0)$ точки x_0, что для любых $x', x'' \in U(\delta; x_0)$ выполнялось неравенство $\left|f(x'') - f(x')\right| < \varepsilon$:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \iff$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0: \forall x', x'' \in U(\delta; x_0) \quad \left|f(x'') - f(x')\right| < \varepsilon .$$

► *Необходимость.* По определению предела функции имеем:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall x\in U(\delta;x_0) \quad |f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда для любых двух точек x' и x'' из окрестности $U(\delta;x_0)$ получим

$$|f(x'')-f(x')|=|f(x'')-A+A-f(x')|=|f(x'')-A|+|f(x')-A|<$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Достаточность. В силу условия для функции $f(x)$ записать

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0:\ \forall x',x''\in U(\delta;x_0) \quad |f(x'')-f(x')|<\varepsilon.$$

Возьмем произвольную последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, сходящуюся к точке x_0: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$. Тогда по определению предела последовательности $\forall\,\varepsilon>0$ найдется такой номер $N(\varepsilon)$, что $\forall n\ge N(\varepsilon)$ имеем $x_n\in U(\delta;x_0)$. Поэтому для всех номеров $n\ge N(\varepsilon)$ и $m>N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$. Значит, последовательность $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна. Согласно критерий Коши сходимости последовательности, последовательность $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ имеет конечный предел. Следовательно, функция $f(x)$ имеет в точке x_0 конечный предел.◄

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение предела функции по Гейне и по Коши. Равносильны ли они?
2. Перечислите свойства конечного предела функции.
3. Дайте определения предела функции при $x\to\infty$, $x\to+\infty$ *и* $x\to-\infty$.
4. Сформулируйте определение бесконечного предела функции при $x\to x_0$ и $x\to\pm\infty$.
5. Дайте определения односторонних пределов функции. Сформулируйте теорему о существовании предела.
6. Докажите критерий Коши существования предела функции.

Лекция 7. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ФУНКЦИИ

1.Определение и свойства бесконечно малых функций.
2 Основные теоремы о пределах.
3. Замечательные пределы.
4. Сравнение асимптотического поведения функций.

1. Определение и свойства бесконечно малых функций.

Определение 1. Функция $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой*** функцией (или бесконечно малой) при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

Обозначается: $\alpha(x) = o(1)$.

Определение 2 (по Гейне). Функция $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой*** функцией при $x \to x_0$, если для любой последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ точек $x_n \in \overset{\circ}{U}(\delta; x_0)$, сходящейся к x_0, последовательность соответствующих значений функции $(\alpha(x_n))_{n=1}^{\infty}$ сходится к 0.

Символическая запись:

$$\alpha(x) = o(1) \;\Leftrightarrow\; \forall (x_n)_{n=1}^{\infty} : \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \quad \lim_{n \to \infty} \alpha(x_n) = 0 .$$

Определение 3 (по Коши). Функция $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой*** функцией при $x \to x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что при всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Символическая запись:

$$\alpha(x) = o(1) \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; \forall x \;\; 0 < |x - x_0| < \delta$$
$$|\alpha(x)| < \varepsilon .$$

Аналогично определяются бесконечно малые функции при $x \to \infty$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to x_0 - 0$, $x \to x_0 + 0$.

Пример. Функция $f(x) = \sin x$ при $x \to 0$ является бесконечно малой, так как $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = 0$. Функция $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ при $x \to \infty$ является бесконечно малой, поскольку $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$.

Теорема 1. *Функция $f(x)$ при $x \to x_0$ имеет конечный предел A тогда и только тогда, когда функция $\alpha(x) = f(x) - A$ является бесконечно малой при $x \to x_0$.*

► *Необходимость.* Пусть существует предел $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Рассмотрим функцию $\alpha(x) = f(x) - A$.

Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = \lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - A) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) - A = A - A = 0$.

Достаточность. Из равенства $\alpha(x) = f(x) - A$ получаем $f(x) = \alpha(x) + A$.

Значит, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} (\alpha(x) + A) = \lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) + A = 0 + A = A$. ◄

Теорема 2. *Конечная сумма бесконечно малых функций в окрестности $\overset{\circ}{U}(\delta; x_0)$ есть функция, бесконечно малая в $\overset{\circ}{U}(\delta; x_0)$.*

► Если $\alpha_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, – бесконечно малые функций в $\overset{\circ}{U}(\delta; x_0)$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha_i(x) = 0$, $i = \overline{1, n}$. Так как

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \lim_{x \to x_0} \alpha_i(x) = 0,$$

то конечная сумма бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая. ◄

Теорема 3. *Произведение бесконечно малой функции $\alpha(x)$ и функции $\varphi(x)$, ограниченной в $\overset{\circ}{U}(\delta; x_0)$, есть бесконечно малая функция.*

► Пусть $\varphi(x)$ ограничена в $\overset{\circ}{U}(\delta; x_0)$, т.е,

$$\exists M > 0: \ \forall x \in \overset{\circ}{U}(\delta; x_0) \quad |\varphi(x)| \le M,$$

а $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция в окрестности $\overset{\circ}{U}(\delta; x_0)$.

Значит,

$$\forall \frac{\varepsilon}{M} > 0 \ \ \exists \delta_1 > 0: \ \forall x \in \overset{\circ}{U}(\delta_1; x_0) \qquad |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Возьмем $\delta = \min\{\delta; \delta_1\}$. Тогда $|\alpha(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M}$ и $|\varphi(x)| < M$ $\forall x \in \overset{\circ}{U}(\delta; x_0)$. Рассмотрим произведение $\alpha(x) \cdot \varphi(x)$ в окрестности $\overset{\circ}{U}(\delta; x_0)$:

$$|\alpha(x) \cdot \varphi(x)| = |\alpha(x)| \cdot |\varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon.$$

Отсюда функция $\alpha(x) \cdot \varphi(x)$ – бесконечно малая функция. ◄

Следствие 1. *Произведение* $c \cdot \alpha(x)$, $c \in \mathbf{R}$, $\alpha(x)$ *– бесконечно малая функция в* $\overset{\circ}{U}(\delta; x_0)$, *есть бесконечно малая функция.*

Следствие 2. *Произведение двух бесконечно малых функций в* $\overset{\circ}{U}(\delta; x_0)$ *есть бесконечно малая функция.*

Теорема 4. *Частное от деления бесконечно малой функции* $\alpha(x)$ *в* $\overset{\circ}{U}(\delta; x_0)$ *на функцию* $\varphi(x)$ *такую, что* $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) \neq 0$, *есть бесконечно малая функция.*

►Так как $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция, то $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

Рассмотрим $\dfrac{\alpha(x)}{\varphi(x)}$, тогда

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)} = \frac{0}{\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)} = 0$$

и $\dfrac{\alpha(x)}{\varphi(x)}$ – бесконечно малая функция.◄

Теорема 5 (связь бесконечно больших и бесконечно малых функций). Если функция $\alpha(x)$ при $x \to x_0$ – бесконечно малая, то функция $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ при $x \to x_0$ – бесконечно большая. *Обратно*:

если функция $f(x)$ при $x \to x_0$ – бесконечно большая, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ при $x \to x_0$ – бесконечно малая.

►Пусть $\alpha(x)$ бесконечно малая функция при $x \to x_0$, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$. Тогда по определению

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0: \; \forall x \; 0 < |x - x_0| < \delta \qquad |\alpha(x)| < \varepsilon .$$

Отсюда $\left|\dfrac{1}{\alpha(x)}\right| > \dfrac{1}{\varepsilon} = K$.

Значит, функция $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ есть бесконечно большая.

Аналогично доказывается обратное утверждение. ◄

Пример. Функция $f(x) = x^4$ при $x \to 0$ является бесконечно малой, а функция $\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{x^4}$ при $x \to 0$ – бесконечно большой.

2. Основные теоремы о пределах.

Теорема 6 (связь предела с арифметическими операциями). *Если функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *в точке* x_0 *имеют конечные пределы,* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$, то

1) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) \pm g(x) \right) = a \pm b$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) \cdot g(x) \right) = a \cdot b$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$, $(b \neq 0)$.

Доказывается аналогично, как и для числовых последовательностей.

Теорема 7 (единственность). *Функция* $f(x)$ *в точке* x_0 *не может иметь больше одного предела.*

► Предположим, что существует два предела $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = B$.

Тогда $0 = \lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x) \right) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A - B$.

Отсюда $A = B$.◄

Теорема 8. *Если функция* $f(x)$ *в точке* x_0 *имеет конечный предел, то она ограничена в некоторой окрестности* $\overset{\circ}{U}(\delta;x_0)$.

Без доказательства.

Теорема 9 (сравнение функций). *Если в* $\overset{\circ}{U}(\delta;x_0)$ *справедливо функциональное неравенство* $f(x)\le\varphi(x)$ *и существуют конечные пределы* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$, *то* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\le\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$.

Без доказательства.

Теорема 10 (о промежуточной переменной). *Если в* $\overset{\circ}{U}(\delta;x_0)$ *справедливы функциональные неравенства* $\psi(x)\le f(x)\le\varphi(x)$ *и существует* $\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=A$, $A\in\mathbf{R}$, *то существует* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

Без доказательства.

Теорема 11. *Если в окрестности точки* x_0 *задана сложная функция* $y=f(u(x))$ *и существуют пределы* $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=u_0$ ($u(x)\ne 0$ *при* $x\ne x_0$), $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$, *то существует предел сложной функции* $y=f(u(x))$ *в точке* x_0 *и*

$$\lim_{x\to x_0} f(u(x))=\lim_{u\to u_0} f(u).$$

Без доказательства.

Из теоремы 6, если условия 1) и 2) верны для любого конечного числа слагаемых и сомножителей, то

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f_1(x)\pm\ldots\pm f_n(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)\pm\ldots\pm\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f_1(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)\cdot\ldots\cdot\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)$.

Отсюда если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a^n$, то

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^n=a^n,\ \forall\ n\in\mathbf{N},$$

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{a},\ a>0,\ \forall\ n\in\mathbf{N}.$$

Пусть $y=f(x)$ бесконечно большая функция при $x\to x_0$, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.

2. Замечательные пределы.

Теорема 12 (первый замечательный предел). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=1.$

► Так как $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ является четной функцией, рассмотрим ее только на интервале $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. Возьмем дугу AM единичного круга, соответствующую углу, радианная мера которого равна x (рис.1). Тогда $|OA|=1$, $|MP|=\sin x$, $|OP|=\cos x$.

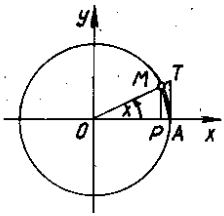

Рис.1. Геометрический смысл
первого замечательного предела

Площадь сектора OAM заключена между площадями треугольников OMA и OTA:

$$S_{\Delta\,\mathrm{OMA}}<S_{\text{сек}}<S_{\Delta\,\mathrm{OAT}}.$$

Значит,

$$\frac{1}{2}|OA||PM|<\frac{1}{2}|OA|^2x<\frac{1}{2}|OA|\cdot|AT|$$

Так как $|OA|=1$, $|PM|=\sin x$, $|AT|=\operatorname{tg}x$, то $\sin x<x<\operatorname{tg}x$.

Отсюда

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}\ \Leftrightarrow\ \cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

В силу четности функций $\cos x$ и $\dfrac{\sin x}{x}$ последнее двойное неравенство справедливо и для интервала $\left(-\dfrac{\pi}{2};0\right)$.

Таким образом, для любого $x \in \left(-\frac{\pi}{2};0\right) \cup \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ выполняется неравенство $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. Другими словами, при $x \to 0$ предел отношения $\frac{\sin x}{x}$ заключен между 1 и $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$.

Следовательно, согласно теоремы 10 имеем $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$. ◄

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,5x}{x}$.

Р е ш е н и е . Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,5x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\cos 5x \cdot x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}\cdot\frac{1}{\cos 5x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{5\sin(5x)}{(5x)}\cdot\frac{1}{\cos 5x} = 5.$$

Теорема 13 (второй замечательный предел).

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(1^\infty\right) = \mathrm{e}.$$

► Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1^\infty\right) = \mathrm{e}$, $n \in \mathbf{N}$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

Случай 1. $x > 1$.

Положим $n = [x]$ и представим число x в виде $x = n + \alpha$, где $n \in \mathbf{N}$ и $0 \le \alpha < 1$.

Поскольку $n \le x \le n+1$, то

$$\frac{1}{n+1} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{n}.$$

Отсюда

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Переходя к пределу при $x \to +\infty$ ($n \to +\infty$), получим

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}=e\cdot 1=e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{1}=e\cdot 1=e$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

Случай 2. $x<-1$.

Положим $x=-y$. Тогда

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\begin{bmatrix}x=-y;\\ x\to-\infty\Rightarrow\\ y\to+\infty\end{bmatrix}=\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y}=$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y}=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\cdot\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{1}=e\cdot 1=e.$$

Объединяя оба случая, получим $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\left(1^{\infty}\right)=e$. ◄

Следствие. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\left(1^{\infty}\right)=e$.

► Имеем

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\left(1^{\infty}\right)=\begin{bmatrix}t=\frac{1}{x};\\ x\to 0\Rightarrow\\ t\to\infty\end{bmatrix}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e. ◄$$

Пример. Вычислить предел $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\left(1^{\infty}\right)=\begin{bmatrix}t=2x;\\ x\to 0\Rightarrow\\ t\to 0\end{bmatrix}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{2}{t}}=\lim_{t\to 0}\left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{2}=$$

$$=\left(\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^2=e^2 .$$

4. Сравнение асимптотического поведения функций. Под *асимптотикой*, или *асимптотическим поведением функции в окрестности некоторой точки* $x_0 \in \mathbf{R}$, понимается описание поведения функции вблизи точки x_0, в которой функция, как правило, не определена.

Асимптотическое поведение функции обычно характеризуется с помощью другой, более простой или более изученной функции, которая в окрестности исследуемой точки с малой относительной погрешностью воспроизводит значения изучаемой функции.

Определение 4. Если $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – бесконечно малые функции и

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq 0 ,$$

то они называются ***бесконечно малыми одного порядка малости***.

Обозначается: $\alpha(x)=O(\beta(x))$.

Запись $\alpha(x)\in O(1)$ означает, что функция $\alpha(x)$ при $x\to x_0$ *ограничена*.

Пример. Функции $\alpha(x)=x^3-x^2-2x$, $\beta(x)=2x$ при $x\to 0$ имеют одинаковый порядок малости, так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-x^2-2x}{2x}=-1\neq 0$.

Поэтому $2x=O\left(x^3-x^2-2x\right)$ и $x^3-x^2-2x=O(x)$ при $x\to 0$.

Определение 5. Если функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – бесконечно малые и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$ то они называются ***эквивалентными*** (***асимптотически равными)*** при $x\to x_0$.

Обозначается: $\alpha(x)\sim\beta(x)$ или $\alpha(x)\approx\beta(x)$ при $x\to x_0$.

Пример. Функции $x^3-x^2+2x\sim x$ при $x\to 0$, поскольку

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-x^2+2x}{2x}=1.$$

Если функция $\alpha(x)$ такова, что $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, то при $x\to x_0$ справедливы следующие эквивалентности:

$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$, $\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)$,

$\mathrm{tg}\,\alpha(x)\sim\alpha(x)$, $\mathrm{arctg}\,\alpha(x)\sim\alpha(x)$,

$\sqrt{1+\alpha(x)}-1\sim\frac{1}{2}\alpha(x)$, $\sqrt[n]{1+\alpha(x)}-1\sim\frac{1}{n}\alpha(x)$,

$\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)$, $e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$.

Теорема 14. *Предел отношения двух бесконечно малых функций равен пределу отношения эквивалентных им функций, т.е. если при* $x\to x_0$ $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$, $\beta(x)\sim\beta_1(x)$, *то* $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$.

► Запишем $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\cdot\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\cdot\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}$.

Переходя в этом равенстве к пределу при $x\to x_0$ и учитывая, что

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}=1,\ \lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\beta_1(x)}=1,$$

находим

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\cdot\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\cdot\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$ ◄

Данная теорема используется при вычислении пределов, так как каждую бесконечно малую (или только одну) можно заменить бесконечно малой, ей эквивалентной.

Определение 6. Если функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – бесконечно малые и $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то говорят, что $\alpha(x)$ является ***бесконечно малой функцией более высокого порядка*** по сравнению с функцией $\beta(x)$.

Обозначается: $\alpha(x)=o(\beta(x))$.

Запись $\alpha(x)\in o(1)$ при $x\to x_0$ означает, что функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x\to x_0$. $o(1)$ – множество бесконечно малых функций при $x\to x_0$.

Пример. Функция $\alpha(x)=x^6$ при $x\to 0$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем $\beta(x)=\sin x^3$, $x^6=o(\sin x^3)$, так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^6}{\sin x^3}=\lim_{x\to 0}x^3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sin x^3}=0.$$

Определение 7. Если функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – бесконечно малые и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k}=c$, $c\neq 0$, $k>0$, то $\alpha(x)$ называется функцией ***k* -го порядка малости** по сравнению с $\beta(x)$.

Соотношения вида $\alpha(x)=O(\beta(x))$, $\alpha(x)=o(\beta(x))$, $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to x_0$ называются ***асимптотическими оценками***.

Для бесконечно больших функций имеют место аналогичные правила сравнения, как и для бесконечно малых функций.

Определение 8. Если $f(x)$, $g(x)$ – бесконечно большие функции и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c\neq 0$, то они называются ***бесконечно большими одного порядка роста при*** $x\to x_0$.

Определение 9. Если $f(x)$, $g(x)$ – бесконечно большие функции при $x\to x_0$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{(g(x))^k}=c\neq 0$, $k>0$, то $f(x)$ – функция ***k-го порядка роста*** по сравнению с $g(x)$.

Пример. Функции $f(x)=2x^2+4$ и $g(x)=x^2-8$ при $x\to\infty$ имеют одинаковый порядок роста, так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+4}{x^2-8}=2$.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение бесконечно малой функции.
2. Перечислите свойства бесконечно малых функций.
3. Докажите первый замечательный предел.
4. Докажите второй замечательный предел.

5. Какие бесконечно малые функции называются эквивалентными? Приведите примеры эквивалентных функций.

6. Дайте определение бесконечно большой функции. Сформулируйте теорему о связи бесконечно большой и бесконечно малой функции.

Лекция 8. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

1. Определение непрерывности функции.
2. Точки разрыва и их классификация.
3. **Непрерывность элементарных функций.**

1. Определение непрерывности функции.

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если выполняются следующие три условия:

1) функция $y = f(x)$ определена в точке x_0, т.е. $x_0 \in D(f)$;

2) существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Если в точке x_0 нарушено хотя бы одно из условий 1–3, то функция называется ***разрывной в точке*** x_0, а точка x_0 – ***точкой разрыва***.

Определение 2 (по Коши). Функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если для любого заданного числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $\delta > 0$ (зависящее от ε и x_0), что для всех x, для которых $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Символическая запись:

$f(x)$ *непрерывна в точке* x_0 $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in U(\delta; x_0) \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon .$$

Пусть $x - x_0 = \Delta x$ – приращение аргумента, а

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

– приращение функции в точке x_0. При фиксированном x_0 приращение Δy является функцией аргумента Δx. Геометрический смысл приращений виден на рисунке 1.

Определение 3. Функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции Δy, т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

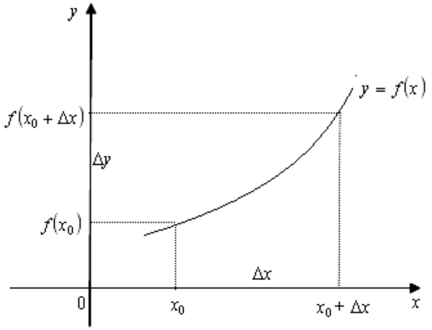

Рис.1. Непрерывность функции

О п р е д е л е н и е 4. Функция $f(x)$, определенная в некоторой левой (правой) окрестности точки x_0 называется ***непрерывной слева (справа)*** в точке x_0, если существует предел слева (справа) функции $y = f(x)$ и он равен $f(x_0)$:

$$f(x) \text{ *непрерывна справа в точке* } x_0 \Leftrightarrow \exists \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0),$$

$$f(x) \text{ *непрерывна слева в точке* } x_0 \Leftrightarrow \exists \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0).$$

Из определения односторонней непрерывности в точке x_0 следует, что функция $f(x)$, определенная в некоторой δ-окрестности точки x_0, непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда она непрерывна в этой точке слева и справа.

О п р е д е л е н и е 5. Функция $f(x)$ непрерывная во всех точках некоторого множества X, называется ***непрерывной на множестве*** X.

Если $X = [a;b]$, то для непрерывности функции на $[a;b]$ требуется, чтобы $f(x)$ была непрерывна во всех внутренних точках отрезка, непрерывна справа на левом его конце, т.е. в точке a, и непрерывна слева на правом его конце, т.е. в точке b. Класс непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций обозначается $C_{[a;b]}$.

Теорема 1. *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *непрерывны в точке* x_0. *Тогда функции* $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, *где* $g(x) \neq 0$, *также непрерывны в этой точке.*

► Поскольку непрерывна в точке x_0 функции $f(x)$ и $g(x)$

имеют в этой точке пределы, то по свойствам пределов существуют пределы и

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \pm g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) \pm g(x_0),$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) \cdot g(x_0),$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \text{ при } g(x) \neq 0.$$

Согласно определения 1 данные функции непрерывны. ◄

2. Точки разрыва функции и их классификация.

Определение 6. Точка x_0 называется ***точкой разрыва*** функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ не является непрерывной.

Разрывы функции классифицируются следующим образом.

Определение 7. Точка x_0 называется ***точкой устранимого разрыва*** функции $f(x)$, если в этой точке существует конечный предел $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = A$, но $f(x_0) \neq A$.

Вводя новую функцию

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), \text{ если } x \neq x_0, \\ A, \text{ если } x = x_0, \end{cases}$$

получим

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f_1(x) = A = f_1(x_0),$$

т.е. новая функция является непрерывной.

Пример. Функция

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, \text{ если } x \neq 0, \\ 0, \text{ если } x = 0 \end{cases}$$

имеет в точке $x = 0$ точку устранимого разрыва, поскольку $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \neq 0$. Этот разрыв можно устранить, положив

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, \text{ если } x\neq 0,\\ 1, \text{ если } x=0.\end{cases}$$

О п р е д е л е н и е 8. Точка x_0 называется ***точкой разрыва 1-го рода*** функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ имеет конечные, но не равные односторонние пределы:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)\neq \lim_{x\to x_0+0} f(x).$$

В частности, если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$, то функция $f(x)$ называется ***непрерывной слева***, если $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$ – ***непрерывной справа***.

Пример. Функция

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1 \text{ при } x>0,\\ 0 \text{ при } x=0,\\ -1 \text{ при } x<0\end{cases}$$

в точке $x_0=0$ имеет разрыв 1-го рода, так как

$$\lim_{x\to 0-0}\operatorname{sgn} x=-1 \text{ и } \lim_{x\to x_0+0}\operatorname{sgn} x=1.$$

Пусть существуют два конечных односторонних предела $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)$, не равные друг другу. Разность $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ называется ***скачком*** функции $f(x)$ в точке x_0.

О п р е д е л е н и е 9. Точка x_0 называется ***точкой разрыва*** 2-***го рода*** функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ имеет хотя бы один бесконечный односторонний предел:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\infty \text{ или } \lim_{x\to x_0+0} f(x)=\infty.$$

Пример. Функция $f(x)=\dfrac{1}{x}$ в точке $x_0=0$ имеет бесконечный разрыв, поскольку

$$\lim_{x\to x_0-0}\frac{1}{x}=-\infty \text{ и } \lim_{x\to x_0+0} f(x)=+\infty.$$

О п р е д е л е н и е 10. Функция $f(x)$ называется ***кусочно-непрерывной на отрезке*** $[a;b]$, если она непрерывна во всех внутренних точках $[a;b]$, за исключением, может быть, конечного числа точек, в которых она имеет разрыв 1-го рода. При этом существуют односторонние пределы в точках a и b. Функция $f(x)$ называется ***кусочно-непрерывной на числовой прямой*** $\mathbf{R}$, если она кусочно-непрерывна на любом отрезке.

Пример. Функция $y=[x]$ является кусочно-непрерывной на любом отрезке и на числовой прямой $\mathbf{R}$. График данной функции изображен на рисунке 2. Функция $y=[x]=n$, $n=0,\pm1,\pm2,...$, является непрерывной справа и разрывной слева. В других точках она непрерывна справа и слева.

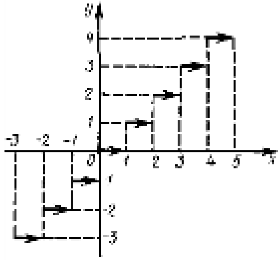

Рис.2. График функции $y=[x]$

3. Непрерывность основных элементарных функций.

Теорема 2. *Многочлен* $P_n(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$, $a_k\in\mathbf{R}$, $k=\overline{0,n}$, *является функцией, непрерывной для любого* $x\in\mathbf{R}$.

Без доказательства.

Теорема 3. *Всякая рациональная функция* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *непрерывна в любой точке* $x\in\mathbf{R}$, *для которой* $Q(x)\neq0$, *где* $P(x)$, $Q(x)$ *– многочлены.*

Без доказательства.

Теорема 4. *Если функция* $u=\varphi(x)$ *непрерывна в точке* x_0, *а функция* $y=f(u)$ *непрерывна в точке* u_0, *то сложная функция* $y=f(\varphi(x))$ *непрерывна в точке* x_0.

► По определению сложной функции имеем

$$y=f\circ\varphi \iff y=f(\varphi(x)).$$

Пусть $x\to x_0$. Тогда из непрерывности функции $\varphi(x)$ следует, что $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)=u_0$, т.е. что $u\to u_0$. Поскольку $f(u)$ непрерывна в точке u_0, то

$$\lim_{u\to u_0} f(u)=f(u_0).$$

Но так как $u=\varphi(x)$, то последнее равенство можно записать в виде

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x))=f(\varphi(x_0)). \blacktriangleleft$$

Следствия. 1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(\varphi(x))=f\left(\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\right)$.

2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f\left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right)$.

3. *Сложная функция, являющаяся композицией конечного числа непрерывных в точке x_0 функций, непрерывна в точке x_0.*

Теорема 5. *Пусть функция $y=f(x)$ определена, непрерывна и монотонна на некотором множестве X и пусть Y – множество ее значений. Тогда на множестве Y обратная функция $x=f^{-1}(y)$ монотонна и непрерывна.*

Теорема 6. *Основные элементарные функции непрерывны во всех точках, принадлежащих их области определения.*

► Для функции $y=\sin x$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0\right)=0.$$

Для функции $y=\cos x$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\cos(x_0+\Delta x)-\cos x_0\right)=0.$$

В силу теоремы 1, имеем, что функция $y=\operatorname{tg} x$ непрерывна на множестве $\mathbf{R}$, за исключением точек $x_k=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$; функция $y=\operatorname{ctg} x$ непрерывна на множестве $\mathbf{R}$, за исключением точек $x_k=k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

Для показательной функции $y=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$ имеем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left(a^{x_0+\Delta x}-a^{x_0}\right)=a^{x_0}\lim_{\Delta x\to 0} a^{\Delta x}-a^{x_0}=0.$$

Непрерывность логарифмической функции и обратных тригонометрических функций следует из теоремы 5 о непрерывности обратной функции. ◄

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте определения непрерывной функции.

2. Какие арифметические действия не нарушают свойство непрерывности.

3. Какая точка называется точкой устранимого разрыва?

4. Какая точка называется точкой разрыва 1-го рода?

5. Какая точка называется точкой разрыва 2-го рода?

6. Сформулируйте теорему о непрерывности сложной функции.

Лекция 9. СВОЙСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Теорема об устойчивости знака непрерывной функции.
2. Прохождение непрерывной функции через любое промежуточное значение.
3. Ограниченность непрерывных функций.
4. Достижение непрерывной функцией своих точных граней.

1. Теорема об устойчивости знака непрерывной функции.

Теорема 1. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна в точке* x_0 *и* $f(x_0)\neq 0$*, то существует такая окрестность точки* x_0*, в которой знак функции совпадает со знаком* $f(x_0)$.

► Пусть $f(x_0)>0$ (рис.1, а).

Тогда по определению 2 непрерывности функции имеем

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0:\forall x\in U(\delta;x_0)\Rightarrow\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon .$$

Из последнего неравенства получим

$$f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon .$$

В силу произвольности ε положим $\varepsilon=f(x_0)$. Тогда

$$0<f(x)<2f(x_0).$$

Если $f(x_0)<0$, то рассмотрим функцию $-f(x)$. Тогда $-f(x_0)>0$, то по доказанному выше существует δ-окрестность точки x_0, в которой $-f(x)>0$. Отсюда $f(x)<0$. ◄

Геометрическая интерпретация теоремы 1 дана на рис.1 (случаю $f(x_0)>0$ соответствует рис.1,*а*, случаю $f(x_0)<0$ – рис.1,*б*).

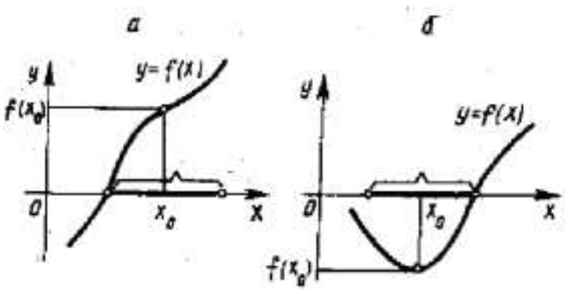

Рис.1. Геометрическая интерпретация теоремы об устойчивости знака функции

Пример. Функция $f(x)=\sin x$ непрерывна в точке $x_0=\frac{\pi}{4}$, и $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}>0$. Тогда существует такая окрестность точки $x_0=\frac{\pi}{4}$, в которой функция $\sin x$ сохраняет знак, т.е. $\sin x>0$.

2. Прохождение непрерывной функции через любое промежуточное значение.

Теорема 2 (1-я теорема Больцано – Коши). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри этого отрезка существует точка ξ, в которой значение функции равно нулю:*

$$f(x):\ f(a)f(b)<0\ \Rightarrow\ \exists x_0\in(a;b):\ f(x_0)=0.$$

► *Шаг 1. Существование.* Пусть для определенности $f(a)<0$ и $f(b)>0$.

Разделим отрезок $[a;b]$ пополам точкой $\frac{a+b}{2}$. Если $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$, то теорема доказана. В противном случае выберем тот из двух отрезков, на концах которого функция имеет значения разных знаков. Обозначим его $[a_1;b_1]$, его длина равна $b_1-a_1=\frac{b-a}{2}$. Разделим отрезок $[a_1;b_1]$ пополам точкой $\frac{a_1+b_1}{2}$. Если $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)=0$, то теорема доказана. В противном случае выберем тот из двух отрезков, на концах которого функция имеет значения разных знаков, и обозначим его $[a_2;b_2]$, его длина равна $b_2-a_2=\frac{b-a}{2^2}$. Продолжая этот процесс неограниченно, на n-ом шаге значение функции в середине отрезка $[a_n;b_n]$ может быть равным нулю, и тогда теорема доказана, либо получим последовательность

$$[a;b]\supset[a_1;b_1]\supset[a_2;b_2]\supset\ldots\supset[a_n;b_n]\supset\ldots$$

вложенных отрезков, причем $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n} \to 0$ при $n \to \infty$ и на концах каждого отрезка $[a_n; b_n]$ принимает значения разных знаков. Тогда по теореме о вложенных отрезках существует точка ξ, принадлежащая всем отрезкам.

Шаг 2. Покажем, что $f(\xi)=0$. Предположим, что $f(\xi)\neq 0$. Пусть $f(\xi)>0$. Тогда по теореме об устойчивости знака непрерывной функции существует такая окрестность точки ξ, в которой $f(x)>0$. В эту окрестность при достаточно большом n попадает отрезок $[a_n; b_n]$. Следовательно, на отрезке $[a_n; b_n]$ выполнено неравенство $f(x)>0$. Однако это противоречит условию, что на концах отрезка функция принимает значения разных знаков.

Аналогично доказывается, если $f(\xi)<0$

Следовательно, $f(\xi)=0$. ◄

Геометрический смысл теоремы заключается в следующем: если точки $A(a; f(a))$ и $B(b; f(b))$ графика функции $f(x)$, соответствующие концам отрезка $[a;b]$ лежат по разные стороны от оси Ox (рис.2.), то график функции хотя бы в одной точке отрезка пересекает ось Ox .

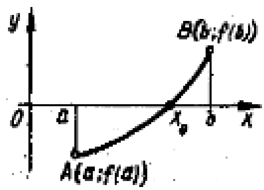

Рис.2. Геометрическая интерпретация

1-ой теоремы Больцано-Коши

Замечание. Если $f(x)$ непрерывна и монотонна на $[a;b]$, то существует единственная точка x_0, такая, что $f(x_0)=0$.

Теорема 3 (2-я теорема Больцано-Коши). *Пусть* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a;b]$ *и* $f(a)=A$, $f(b)=B$. *Тогда для любого числа, заключенного между* A *и* B, *найдется такая точка*

$c \in [a;b]$, *что* $f(c) = C$.

► Пусть для определенности $A < B$ и $A < C < B$. Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x) = f(x) - C$. Эта функция непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает на концах отрезка значения разных знаков:

$$g(a) = f(a) - C = A - C < 0,$$
$$g(b) = f(b) - C = B - C > 0.$$

Тогда по теореме 2 существует такая точка $c \in [a;b]$ такая, что $g(c) = 0$. Отсюда $f(c) = C$. ◄

Замечание. Теорему 3 можно переформулировать так: *непрерывная функция, переходя от одного значения к другому, обязательно принимает все промежуточные значения.*

Геометрический смысл теоремы 3 заключается в следующем. Рассмотрим график функции $f(x)$ (рис.3). Пусть $f(a) = A$ и $f(b) = B$. Тогда прямая $y = C$, где C – любое число, заключенное между A и B, пересечет график функции по крайней мере в одной точке. Если же $f(x)$ непрерывна и монотонна на $[a;b]$, то существует единственная точка $c \in [a;b]$, такая, что $f(c) = C$.

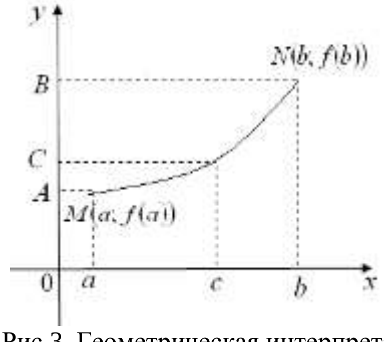

Рис.3. Геометрическая интерпретация

2-ой теоремы Больцано-Коши

3. Ограниченность непрерывных функций.

Лемма 1. *Функция* $f(x)$, *непрерывная в точке* x_0, *ограничена в некоторой ее окрестности*.

► По определению непрерывности функции $f(x)$ в точке

x_0, имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 : \forall x \in U(\delta; x_0) \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon .$$

В силу произвольности ε, возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда получим

$$|f(x) - f(x_0)| < 1 .$$

С учетом этого

$$|f(x)| = |f(x) - f(x_0) + f(x_0)| \le |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)| < 1 + |f(x_0)| .$$

Положим $M = 1 + |f(x_0)|$. Тогда $|f(x)| < M$. Следовательно, функция $f(x)$ ограничена в окрестности $U(\delta; x_0)$. ◄

Теорема 4 (1-я теорема Вейерштрасса). *Если функция* $f(x)$ *определена и непрерывна на отрезке* $[a;b]$, *то она ограничена на этом отрезке*.

► Доказываем методом от противного. Предположим, что функция $f(x)$ неограничена на отрезке $[a;b]$. Разделим отрезок $[a;b]$ пополам. Тогда хотя на одном из полученных отрезков функция $f(x)$ неограничена. В противном случае она была бы ограничена на $[a;b]$. Обозначим его $[a_1;b_1]$. Разделим его пополам и обозначим $[a_2;b_2]$ тот отрезок, на котором функция $f(x)$ неограничена. Продолжая этот процесс неограниченно, получим последовательность вложенных отрезков

$$[a;b] \supset [a_1;b_1] \supset [a_2;b_2] \supset \ldots \supset [a_n;b_n] \supset \ldots ,$$

на каждом из которых $f(x)$ неограниченна. При этом длины отрезков равны $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n} \to 0$ при $n \to \infty$.

Тогда по лемме о вложенных отрезках существует точка ξ, принадлежащая всем отрезкам. Функция $f(x)$ по условию определена и непрерывна в точке ξ. В силу леммы 1 функция $f(x)$ ограничена в некоторой ее окрестности. В эту окрестность при достаточно большом n попадает отрезок $[a_n;b_n]$, на котором функция также ограниченна. Но это противоречит тому, что $f(x)$ не ограничена на каждом из вложенных отрезков.

Следовательно, $f(x)$ ограничена на отрезке $[a;b]$. ◄

Замечание. Теорема 4 неверна, если отрезок $[a;b]$ заменить интервалом $(a;b)$.

Пример. Функция $f(x)=\dfrac{1}{x}$ непрерывна на интервале $(0;1)$. Однако не является ограниченной на этом промежутке, поскольку $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{1}{x}=+\infty$.

4. Достижение непрерывной функцией своих точных граней. Пусть функция $y=f(x)$ определена на промежутке X, и множество ее значений Y.

Определение 1. Число M (m) называется ***точной верхней (нижней) гранью*** функции $y=f(x)$ на множестве X, если выполняются следующие условия

1) $\forall x\in X \quad f(x)\le M$ ($f(x)\ge m$);

2) для любого числа $M^{'}<M$ ($m^{'}>m$) найдется такая точка $x^{'}\in X$, что $f\left(x^{'}\right)>M^{'}$ ($f\left(x^{'}\right)<m^{'}$).

Условие 1) означает, что число M является одной из верхних граней функции $y=f(x)$ на множестве X, условие 2) показывает, что M наименьшая из верхних граней функции. Аналогично для точной нижней грани.

Если множество Y неограниченно сверху, то $\sup\limits_X f(x)=+\infty$, если снизу, $\inf\limits_X f(x)=-\infty$.

Теорема 5 (2-я теорема Вейерштрасса). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то на этом отрезке она достигает своих нижней и верхней граней, т.е. на нем существуют по крайней мере две точки x_1 и x_2 такие, что (рис. 4)*

$$M=f(x_1)=\sup_{[a;b]}f(x),\; m=f(x_2)=\inf_{[a;b]}f(x).$$

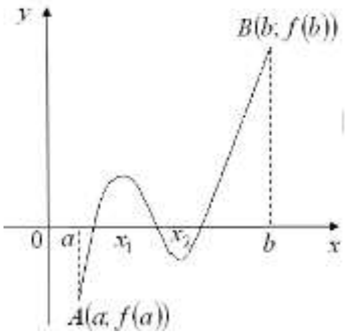

Рис.4. Геометрическая интерпретация

2-ой теоремы Вейерштрасса

► Поскольку функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то по теореме 4 она ограничена на этом отрезке. По теореме о существовании точных верхних и нижних граней у непустого множества имеем, что существуют точная верхняя M и точная нижняя m грани функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Докажем, что $f(x)$ достигает M, т.е. существует такая точка $x_1 \in [a;b]$, что $M = f(x_1)$.

Доказываем методом от противного. Предположим, что функция $f(x)$ не принимает ни в одной точке $[a;b]$ значения M. Рассмотрим вспомогательную неотрицательную функцию

$$g(x)=\frac{1}{M-f(x)}.$$

Функция $g(x)$ непрерывна как частное двух непрерывных функций. По теореме 4 она ограничена, т.е. существует положительное число $K>0$ такое, что $\forall x \in [a;b]$ выполняется неравенство

$$g(x)=\frac{1}{M-f(x)}<K.$$

Отсюда $f(x) \le M - \dfrac{1}{K}$.

Число $M-\dfrac{1}{K}<M$ является верхней гранью $f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Но это противоречит тому, что число M является точной верхней гранью, т.е. наименьшей верхней гранью функции $f(x)$

на отрезке $[a;b]$. Следовательно, существует такая точка $x_1 \in [a;b]$, в которой $M = f(x_1)$.

Аналогично доказывается, что функция $f(x)$ достигает на отрезке $[a;b]$ своей точной нижней грани m. ◄

Замечание. Полагая

$$M = \sup_{[a;b]} f(x) = \max_{[a;b]} f(x),\ m = \inf_{[a;b]} f(x) = \min_{[a;b]} f(x),$$

можно теорему 5 сформулировать следующим образом*: непрерывная на отрезке функция имеет на этом отрезке максимальное и минимальное значения*.

Определение 2. Разность между наибольшим и наименьшим значениями непрерывной функции $f(x)$ на $[a;b]$, называется ***колебанием*** функции на этом отрезке.

Обозначается: $\omega = \max_{[a;b]} f(x) - \min_{[a;b]} f(x)$.

Пример. Функция $f(x) = x^2$ непрерывна на отрезке $[-2;3]$. Она ограничена на $[-2;3]$ ($\left|x^2\right| \le 9$) и существуют такие две точки $x_1 = 0$ и $x_2 = 3$, принадлежащие отрезку $[-2;3]$, что

$$f(x_1) = f(0) = 0 = \inf_{[-2;3]} x^2,\ f(x_2) = f(3) = 9 = \sup_{[-2;3]} x^2.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте и докажите теорему об устойчивости знака непрерывной функции.

2. Сформулируйте и докажите теорему о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение (теоремы Больцано-Коши).

3. Сформулируйте и докажите первую теорему об ограниченности непрерывной функции.

4. Сформулируйте и докажите теорему о достижении непрерывной функцией своих точных граней.

Лекция 10. РАВНОМЕРНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ

1. Определение равномерной непрерывности функции.
2. Теорема Кантора.

1. Определение равномерной непрерывности функции.

Из множества функций, непрерывных на числовом промежутке, выделяют равномерно-непрерывные функции.

Пусть $f(x)$ – функция, непрерывная на некотором промежутке $X \in \mathbf{R}$ и точка $x_0 \in X$. В силу определения непрерывности функции $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $x \in X$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. В общем случае число δ зависит от ε и x_0. При изменении x_0 в пределах рассматриваемого промежутка при постоянном ε число δ различно для разных x_0. Чем круче идет график функции $f(x)$ в окрестности $U(\delta; x_0)$, тем меньше δ, соответствующее данной точке x_0 (рис.1).

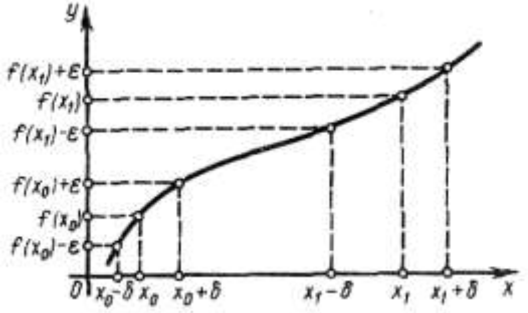

Рис.1. График функции $y = f(x)$

При заданном ε каждой точке $x \in X$ соответствует некоторое число $\delta > 0$. Возникает вопрос: существуют ли непрерывные функции, определенные на некоторых промежутках, для которых по любому $\varepsilon > 0$ находилось бы $\delta > 0$, не зависящее от x, т.е. оно является общим для всех $x \in X$?

Определение 1. Функция $f(x)$ называется ***равномерно-непрерывной*** на множестве $X \subseteq \mathbf{R}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для любых двух точек x_1, $x_2 \in X$, удовлетворяющих условию $|x_1 - x_2| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Символическая запись:

$f(x)$ *равномерно-непрерывна в точке* $x_0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \ \forall x_1, x_2 \in X \quad |x_2 - x_1| < \delta \quad |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon .$$

По определению 1 δ зависит только от ε и является общим для всех x_1, $x_2 \in X$.

Очевидно, что равномерно-непрерывная функция $f(x)$ на промежутке X является непрерывной на X. Чтобы в этом убедиться, достаточно положить $x_1 = x$, $x_2 = x_0$. Тогда из определения равномерной непрерывности функции следует определение непрерывной функции в точке x_0.

Обратное утверждение не всегда справедливо. Условие, при котором непрерывная функция является и равномерно-непрерывной, определяется теоремой Кантора о равномерной непрерывности.

Геометрическая иллюстрация равномерной непрерывности функции. Если $f(x)$ равномерно-непрерывна на X, то $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что прямоугольник со сторонами $\delta(\varepsilon)$ и ε, параллельными осям *Ox* и *Oy*, можно переместить вдоль графика (сохраняя параллельность сторон осям координат), что график не пересечет горизонтальных сторон прямоугольника, а будет пересекать только вертикальные стороны (рис.2).

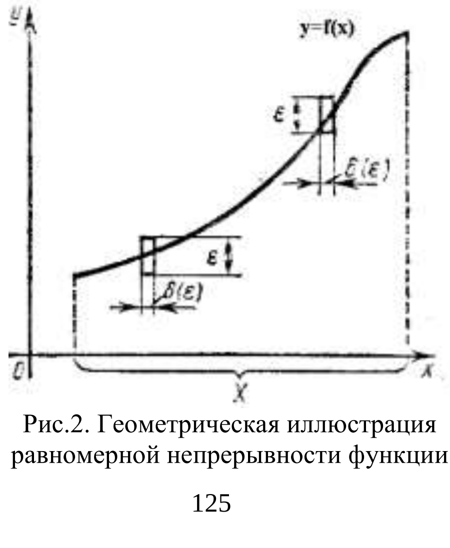

Рис.2. Геометрическая иллюстрация равномерной непрерывности функции

2. Теорема Кантора.

Теорема 1 (Кантора). *Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a;b]$, равномерно-непрерывна на этом отрезке.*

► *Шаг 1.* Докажем, что если функция $f(x) \in C_{[a;b]}$, то $\forall \varepsilon > 0$ отрезок $[a;b]$ можно разбить на конечное число отрезков, любые два из которых или не имеют общих точек, или имеют одну общую граничную точку и на каждом из которых $\forall x_1, x_2$ выполняется неравенство $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$.

Предположим обратное. Пусть существует $\varepsilon > 0$, для которого такое разбиение невозможно. Разделим $[a;b]$ пополам и выберем из полученных отрезков тот, для которого такое разбиение невозможно. Обозначим его $[a_1;b_1]$. Разделим отрезок $[a_1;b_1]$ пополам и выберем из полученных отрезков тот, для которого такое разбиение невозможно. И так далее. Продолжая этот процесс неограниченно, получим последовательность вложенных отрезков

$$[a;b] \supset [a_1;b_1] \supset \ldots \supset [a_n;b_n] \supset \ldots,$$

обладающих тем свойством, что ни один из них нельзя разбить на конечное число отрезков, на каждом из которых $\forall x_1, x_2$ выполняется неравенство $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$.

По теореме о вложенных отрезках существует точка ξ, принадлежащая всем отрезкам. В силу непрерывности функции $f(x)$ в точке ξ, имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \ \forall x \in U(\delta;\xi) \quad |f(x) - f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда $\forall x_1, x_2 \in U(\delta;\xi)$ выполняется неравенство

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f(x_2) - f(\xi) + f(\xi) - f(x_1)| \le$$

$$\le |f(x_2) - f(\xi)| + |f(x_1) - f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

В окрестность $U(\delta;\xi)$ при достаточно большом n попадает отрезок $[a_n;b_n]$. Следовательно, $\forall x_1, x_2 \in [a_n;b_n]$ выполняется $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$. Это противоречит выбору последовательности отрезков $([a_n;b_n])_{n=1}^{\infty}$.

Шаг 2. Докажем равномерную непрерывность функции $f(x)$.

Согласно шага 1 для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение $[a;b]$ на конечное число отрезков , в каждом из которых $\forall x_1, x_2 \in [a_k; b_k]$, $k = 1,2,..., n$, выполняется $|f(x_2) - f(x_1)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Обозначим $\delta = \min\limits_{1 \le k \le n}(b_n - a_n)$.

Рассмотрим две любые две точки $x_1, x_2 \in [a;b]$ такие, что

$$|x_2 - x_1| < \delta .$$

Если $x_1, x_2 \in [a_n; b_n]$, то имеем $|f(x_2) - f(x_1)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Если x_1 и x_2 двум соседним отрезкам разбиения, то получим:

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f(x_2) - f(x_0) + f(x_0 -) f(x_1)| \le$$

$$\le |f(x_2) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x_1)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon ,$$

где x_0 – общая граничная точка соседних отрезков. ◄

Следствие. *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a;b]$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что если* $[a;b]$ *разбить произвольным образом на конечное число отрезков с длинами меньше* δ, *то на каждом из них колебание* ω *функции* $f(x)$ *будет меньше* ε .

Без доказательства.

Замечание. Теорема не верна, если отрезок заменить интервалом.

Пример. Исследовать на равномерную непрерывность функцию $y = x^2$ на $\mathbf{R}$.

Решение. Докажем, что функция не является равномерно непрерывной пользуясь определением равномерной непрерывности. Построим отрицание определения равномерной непрерывности:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \ \forall \delta > 0 \ \ \exists x_1, x_2 \in \mathbf{R} \ \ |x_2 - x_1| < \delta$$

$$|f(x_2) - f(x_1)| \ge \varepsilon_0 .$$

Возьмем $\varepsilon_0 = 1$ и $\forall \delta > 0$ положим

$$x_1 = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}, \qquad x_2 = \frac{1}{\delta}.$$

Тогда

$$|x_2 - x_1| = \left| \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2} - \frac{1}{\delta} \right| = \frac{\delta}{2} < \delta .$$

При этом

$$\left| f(x_2) - f(x_1) \right| = \left| x_1^2 - x_2^2 \right| = \left| x_1 - x_2 \right| \cdot \left| x_1 + x_2 \right| =$$

$$= \frac{\delta}{2} \cdot \left(\frac{2}{\delta} + \frac{\delta}{2} \right) = 1 + \frac{\delta^2}{4} \geq 1 = \varepsilon_0 .$$

Это доказывает, что функция $y = x^2$ не является равномерно-непрерывной на $\mathbf{R}$. Однако, данная функция непрерывна на $\mathbf{R}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие функции называются равномерно-непрерывными? Приведите примеры равномерно-непрерывных функций.
2. Сформулируйте и докажите теорему Кантора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вещественный и комплексный анализ: Учебное пособие: В 6 кн. / Э.И.Зверович. – Мн.: БГУ, 2003.
2. Зорич В.А Математический анализ. Ч.1 – М.: Наука, 1981.
3. Зорич В.А Математический анализ. Ч.2. – М.: Наука, 1984.
4. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. – М.: Наука, 1985.
5. Кудрявцев. Л.Д. Краткий курс математического анализа: Учебник для вузов. – М.: Наука., 1989.
6. Математический анализ в вопросах и задачах: Учебн. пособие для вузов / Под ред. Бутузова. – М.: Высш. шк., 1984.
7. Математический анализ: Справочное пособие. В 2 ч. Ч.1/ А.И.Герасимович, Н.А. Рысюк. – Мн.: Выш.шк., 1989.
8. Математический анализ: Справочное пособие. В 2 ч. Ч.2/ А.И.Герасимович, Н.П. Кеда, М.Б. Сугак. – Мн.: Выш.шк., 1990.
9. Никольский С.М. Курс математического анализа: В 2т. Т.1. – М.: Наука, 1990.
10. Никольский С.М. Курс математического анализа: В 2т. Т.2. – М.: Наука, 1991.
11. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа: Учеб. пособ. для вузов. – М.: Наука., 1988.

Учебное издание

Марченко Лариса Николаевна

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Тексты лекций для студентов физического факультета
В пяти частях

Часть первая
Введение в анализ

В авторской редакции

Подписано в печать 26.10.2006. (66)Бумага писчая №1. Формат 60x84 1/16. Гарнитура Times New Roman Cyr. Усл.п.л. 8,31. Уч.изд.л. 7,06. Тираж 25 экз.

Отпечатано с оригинала-макета на ризографе
учреждения образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»
246019, г. Гомель, ул. Советская, 104